BOUSSINESQ, J.

Cours d'analyse infinitésimale

Tome 1 fasc. 2

Gauthier-Villars

Paris **1887**

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

COMPLÉMENTS.







COURS

D'ANALYSE INFINITÉSIMALE,

A L'USAGE DES PERSONNES QUI ÉTUDIENT CETTE SCIENCE

EN VUE

DE SES APPLICATIONS MÉCANIQUES ET PHYSIQUES;

PAR J. BOUSSINESQ,

Membre de l'Institut,
Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris.
Ancien Professeur de Calcul différentiel et intégral
à la Faculté des Sciences de Lille et à l'Institut industriel du Nord.

TOME I.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

—

FASCICULE II.

COMPLÉMENTS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Augustins, 55.

1887

TABLE DES MATIÈRES

SPÉCIALES A CE FASCICULE II DU TOME PREMIER.

Pages.

Errata.. XII*

COMPLÉMENT A LA DEUXIÈME LEÇON.

CALCUL DE LA DÉRIVÉE D'UNE SÉRIE.

13*. — Suite : Dérivée d'une série.. 1*

COMPLÉMENT A LA TROISIÈME LEÇON.

ANALOGIES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES; FONCTIONS HYPERBOLIQUES; EXPONENTIELLES IMAGINAIRES, ETC.

18*. — Discontinuités spéciales à la fonction logarithmique ou à d'autres fonctions transcendantes.. 5*

19*. — Sinus et cosinus de la somme de deux arcs; formule de Moivre.. 6*

20*. — Équations algébriques, à racines réelles, qui se résolvent trigonométriquement.. 12*

21*. — Développements de $\cos x$ et de $\sin x$ en série........................ 22*

22*. — Décomposition de $\cos x$ et de $\sin x$ en facteurs; formule de Wallis, etc.. .... 24*

23*. — Des fonctions hyperboliques.. 29*

24*. — Des exponentielles imaginaires.. 33*

* *Note sur la représentation géométrique et la théorie générale* des quantités imaginaires ou complexes........................ 36*

COMPLÉMENT A LA CINQUIÈME LEÇON.

SUPÉRIORITÉ DE CERTAINES FONCTIONS IMPLICITES SUR LES FONCTIONS EXPLICITES, POUR EXPRIMER LES COURBES ET LES SURFACES. PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DU PREMIER ORDRE DES FONCTIONS DE POINT.

40*. — Supériorité d'une certaine forme implicite de l'équation, sur sa forme explicite, pour exprimer une courbe plane; équation de la tangente; des points singuliers que présentent certaines courbes. 44*

42*. — Supériorité d'une forme implicite de l'équation d'une surface sur sa forme explicite; des points singuliers de certaines surfaces... 48*



Pages.
43*. — Différentiation d'une fonction de point le long d'un chemin donné. 51*
44*. — Paramètre différentiel du premier ordre d'une fonction de point.. 52*
45*. — Signification géométrique du paramètre différentiel du premier ordre; cosinus directeurs des normales à une famille de surfaces........ 57*
46*. — Pente d'une surface; notion des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente........ 60*

COMPLÉMENT A LA SIXIÈME LEÇON.

COURBURE DES COURBES PLANES ET PARAMÈTRE DIFFÉRENTIEL DU SECOND ORDRE DES FONCTIONS DE POINT; CHANGEMENTS DE VARIABLES.

51*. — Importance particulière et signification de la dérivée seconde..... 63*
52*. — Courbure d'une courbe plane........ 65*
57*. — Courbure d'une famille de lignes planes........ 67*
59*. — Paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point... 70*
60*. — Signification géométrique et importance de ce paramètre différentiel........ 71*
61*. — Courbure moyenne en un point d'une surface : son expression dans une famille de surfaces........ 74*
62*. — Des changements de variables........ 79*
63*. — Exemples de simplifications produites par de tels changements... 81*

COMPLÉMENT A LA SEPTIÈME LEÇON.

DES CHANGEMENTS DE VARIABLES QUAND IL Y EN A PLUSIEURS INDÉPENDANTES; APPLICATIONS AUX FONCTIONS DE POINT ET A L'ISOTROPIE DES CORPS.

67*. — Changement des variables........ 86*
68*. — Exemple, dans un cas où l'on ne change pas toutes les variables indépendantes........ 89*
69*. — Expressions diverses du paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point........ 92*
70*. — Des fonctions de point rapportées à divers systèmes de coordonnées rectilignes........ 96*
71*. — Analogie des formules de transformation pour les dérivées et pour les coordonnées, quand les axes sont rectangulaires........ 97*
72*. — De l'utilité de cette analogie pour simplifier l'équation de certains phénomènes naturels........ 101*
73*. — Exemples, dans la théorie d'un faisceau de droites et dans celle des petites déformations des corps, de changements portant non seulement sur les variables, mais aussi sur les fonctions........ 103*
74*. — Changements infiniment petits d'axes coordonnés rectangles : leur réduction à trois rotations élémentaires........ 108*
75*. — Des effets que produisent ces changements sur les expressions dépendant de fonctions de point ou de leurs dérivées partielles prises dans les sens des axes........ 113*
76*. — Application à l'isotropie des corps........ 115*

Pages

COMPLÉMENT A LA HUITIÈME LEÇON.

ÉLIMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES PAR LA DIFFÉRENTIATION; ÉTUDE DES FONCTIONS HOMOGÈNES; APPLICATION DU THÉORÈME DE CAUCHY SUR LE RAPPORT DES ACCROISSEMENTS SIMULTANÉS DES FONCTIONS A LA THÉORIE DES ASYMPTOTES RECTILIGNES.

79*. — Élimination, par la différentiation, des fonctions arbitraires, et formation d'équations aux dérivées partielles qui expriment une propriété du plan tangent commune à toute une classe de surfaces, comprenant une infinité de familles, ou une propriété de toute une classe de fonctions de plusieurs variables indépendantes. 121*

80*. — Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et autres propriétés générales de ces fonctions 122*

81*. — Propriété particulière aux fonctions homogènes et entières du second degré; loi de réciprocité qui en résulte pour les déplacements intérieurs d'équilibre d'un corps élastique soumis à diverses actions 125*

90*. — Application du théorème de Cauchy à l'étude des rapports existant entre les tangentes, très éloignées, d'une branche infinie de courbe, et son asymptote 128*

COMPLÉMENT A LA NEUVIÈME LEÇON.

SÉRIE DE TAYLOR POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, ETC.

96*. — Application de la série de Taylor au calcul le plus approché possible des dérivées d'une fonction par le moyen de deux ou de plusieurs valeurs voisines de la fonction 132*

98*. — Extension de la série de Taylor aux fonctions de plusieurs variables 134*

COMPLÉMENT A LA ONZIÈME LEÇON.

EXEMPLES DE MAXIMA OU DE MINIMA DANS DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS; PREUVE DE L'EXISTENCE, CHEZ CERTAINS POLYNOMES, DE MINIMA NULS, DONT DÉPEND LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE.

106*. — Méthode des moindres carrés 138*

107*. — Exemple de minima obtenus, dans une fonction de deux variables, sans qu'on ait besoin de calculer celles-ci 144*

108*. — Application à la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre 150*

COMPLÉMENT A LA DOUZIEME LEÇON.

POINTS D'INFLEXION ET POINTS SINGULIERS D'UNE FAMILLE DE COURBES; CARACTÈRES DES DISCONTINUITÉS QU'ADMETTENT LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

117*. — Lieu des points d'inflexion d'une famille de courbes 154*

Pages.

118*. — Des singularités les plus fréquentes dans les courbes planes: points isolés; points doubles 155*
119*. — Suite : Points de rebroussement 159*
120*. — De quelques autres singularités, beaucoup plus rares: points multiples en général; lignes singulières; points anguleux et points d'arrêt 162*
121*. — Application aux courbes algébriques; absence de points anguleux et de points d'arrêt dans ces courbes 166*
122*. — Exemples de points singuliers dans des courbes algébriques 168*
123*. — Exemples de points anguleux et de points d'arrêt, dans des courbes transcendantes limites de courbes algébriques 170*
124*. — Propriété des asymptotes des courbes algébriques, corrélative de celle qu'ont ces courbes de ne pouvoir présenter de points d'arrêt. Discontinuités possibles dans les fonctions algébriques 172*

COMPLÉMENT A LA QUATORZIÈME LEÇON.

DÉFINITION D'UNE COURBE PAR LA SUITE DE SES COURBURES; THÉORIE DES COURBES ENVELOPPES, ETC.

134*. — Expression du rayon de courbure des sections coniques en fonction d'un angle définissant sa direction même; et conséquences diverses dans le cas d'une ellipse peu aplatie 175*
137*. — De l'enveloppe d'une famille de courbes planes et, généralement, de la ligne sur laquelle ces diverses courbes sont rapprochées de leurs voisines infiniment plus qu'en leurs autres points 178*
138*. — Propriétés communes de ces sortes de lignes 181*
139*. — Propriété distinctive des courbes enveloppes 183*
140*. — Exemples 185*
141*. — Enveloppes intérieures, limitant, dans le champ couvert par une famille de courbes, les régions qui en sont plus ou moins sillonnées. 186*
142*. — Courbes asymptotes et enveloppes asymptotes d'une famille 191*
143*. — Exemples 193*

COMPLÉMENT A LA QUINZIEME LEÇON.

COURBES PLANES EN COORDONNÉES POLAIRES; DE LA SPIRALE LOGARITHMIQUE.

150*. — Des spirales et des coordonnées polaires 198*
151*. — Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale, différentielle de l'arc et rayon de courbure, en coordonnées polaires 200*
152*. — De la spirale d'Archimède et de la spirale logarithmique 202*
153*. — Propriété caractéristique de la tangente à la spirale logarithmique. 203*
154*. — Rayon de courbure et développée de la spirale logarithmique 204*

COMPLÉMENT A LA SEIZIÈME LEÇON.

SUR LES POINTS SINGULIERS DES COURBES GAUCHES.

157*. — Supériorité d'une forme implicite des équations sur leur forme

Pages
explicite, pour représenter à la fois la totalité d'une courbe gauche; points singuliers.... 207*

COMPLÉMENT A LA DIX-SEPTIÈME LEÇON.

DE LA CAMBRURE OU TORSION DES COURBES GAUCHES, ETC.

165*. — Cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale... 210*
167*. — Calcul de l'angle de deux droites voisines, définies par leurs cosinus directeurs.... 212*
168*. — Angle de contingence, calculé par les tangentes.... 213*
170*. — Angle de torsion d'un arc infiniment petit de courbe gauche...... 213*
171*. — De la cambrure d'une courbe gauche.... 215*
172*. — Comment toute courbe gauche peut se déduire, par torsion, d'une courbe plane.... 216*

COMPLÉMENT A LA DIX-HUITIÈME LEÇON.

POINTS SINGULIERS DES SURFACES; DÉVELOPPABLE CIRCONSCRITE A DEUX SURFACES; DÉTERMINATION D'UNE SURFACE PAR L'ENSEMBLE DE SES PLANS TANGENTS; LIGNES DE PENTE, ETC.

174*. — Coup d'œil sur les points singuliers des surfaces courbes : points isolés et points coniques.... 219*
177*. — Problème général des ombres; développable circonscrite à deux surfaces.... 221*
178*. — Détermination d'une surface par l'ensemble de ses plans tangents; onde de Fresnel; idée des surfaces enveloppes en général........ 224*
180*. — Lignes de niveau et lignes de pente; leur forme dans le voisinage d'un fond, d'un sommet, ou d'un col ordinaires 229*
181*. — Autre exemple, où les lignes de niveau et de pente sont circulaires en projection horizontale.... 232*
182*. — Variation de la déclivité le long des lignes de niveau d'une surface.... 235*
183*. — Lignes des déclivités maxima et minima d'une surface; leurs propriétés.... 237*
184*. — Équation finie de ces lignes.... 238*
185*. — Application des théories précédentes à la surface terrestre : thalwegs, faîtes, bassins, etc.... 240*

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

COURBURE DES SURFACES.

186*. — Des formes qu'affecte, en général, une surface aux environs d'un de ses points; paraboloïde de contact.... 241*
187*. — Des deux plans normaux principaux d'une surface, et de ses deux sections principales, en un quelconque de ses points.... 246*
188*. — Propriété caractéristique des sections principales; ombilics 247*

Pages.

189*. — Courbures principales de la surface au point considéré; courbure moyenne et courbure essentielle ou permanente................ 249*
190*. — Détermination de la forme d'une surface aux environs d'un point, en fonction des deux rayons principaux de courbure relatifs à ce point................ 251*
191*. — Surfaces à courbures de même sens et surfaces à courbures opposées; indicatrice................ 252*
192*. — Courbure des lignes tracées sur une surface; théorèmes d'Euler et de Meusnier................ 254*
193*. — Formule générale de cette courbure................ 258*
194*. — Calcul des directions et courbures principales, de la courbure moyenne et de la courbure permanente, pour les divers points d'une surface................ 259*
195*. — Caractères analytiques et détermination des ombilics d'une surface................ 262*
196*. — Calcul des directions asymptotiques pour les divers points d'une surface................ 265*

VINGTIÈME LEÇON.

LIGNES DE COURBURE ET LIGNES ASYMPTOTIQUES. SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX DE SURFACES ET TRANSFORMATIONS PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES. NOTIONS SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES ET SUR LES SURFACES APPLICABLES. LIGNES GÉODÉSIQUES.

197*. — Des lignes de courbure, dans une surface quelconque................ 266*
198*. — Des lignes asymptotiques, dans les surfaces à courbures opposées. 268*
199*. — Théorème de Ch. Dupin, sur les lignes de courbure d'un système triple orthogonal de surfaces................ 270*
200*. — Toute surface, mais non toute famille de surfaces, fait partie d'un système triple orthogonal................ 273*
201*. — Toute surface appartient même à une infinité de systèmes triples orthogonaux; transformations stéréographiques ou par rayons vecteurs réciproques................ 275*
202*. — Propriétés de la transformation stéréographique appliquée aux fonctions de point................ 279*
203*. — Système triple orthogonal formé par les surfaces du second degré homofocales................ 284*
204*. — Lignes de courbure des surfaces du second degré................ 286*
205*. — Des coordonnées elliptiques et, en général, des coordonnées curvilignes................ 287*
206*. — Problème de la déformation des surfaces; calcul des dilatations linéaires éprouvées par une petite partie d'une surface que l'on déforme................ 290*
207*. — Surfaces applicables : condition nécessaire et suffisante pour qu'une petite partie de surface soit applicable sur une surface donnée.. 295*
208*. — Des surfaces applicables sur un plan, ou développables, et, plus généralement, des surfaces réglées, ainsi que de la génération des surfaces courbes par des lignes dites caractéristiques....... 299*

Pages.
209*. — Des lignes géodésiques d'une surface; propriété de leurs plans osculateurs 304*
210*. — Application aux surfaces développables; rayon de courbure des hélices 307*
211*. — Raison de la dénomination des lignes géodésiques; courbure géodésique des lignes d'une surface 309*
212*. — Autres propriétés générales des lignes géodésiques; cercles géodésiques 310*



ERRATA.

Page 2*, fin de la ligne 22, *ajouter, en note au bas de la page :*

« Il va sans dire, d'après le raisonnement fait sur R'_n au haut de cette page, que la série $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots$ est supposée présenter un *certain* degré de convergence, aussi petit que l'on voudra, mais ne tendant vers zéro à l'approche d'aucune valeur considérée de x. Nous excluons donc le cas singulier d'une lenteur de convergence qui, en certains des endroits dont il s'agit (fussent-ils infiniment restreints), dépasserait toute limite et ne permettrait pas de s'en tenir à un nombre *assignable* de termes dans l'évaluation approximative de la série. »

Page 46*. — Le numéro de la figure doit être 10 et non 4.

Page 184*. — Le numéro de la figure doit être 25 et non 29.

Page 213*, à la fin du n° 168*, *ajouter, en note au bas de la page :*

« Il est bon de remarquer une simplification qui se produit quand on choisit la tangente MT pour axe des x. Alors, le cosinus x' atteignant en M son maximum 1, le principe de Fermat y donne $x'' = 0$, et les deux autres cosinus y', z', nuls pour le point M, sont, pour le point M', ceux d'angles presque droits $t'Oy$, $t'Oz$ qui ont leurs plans respectifs à peine différents de ceux des xy et des xz, sur lesquels, par suite, ces angles se projettent sensiblement en vraie grandeur (p. 108*). C'est évidemment dire que dy' ou $y''ds$ et dz' ou $z''ds$ représentent les deux angles respectifs de contingence des projections de l'arc MM' ou ds sur les plans des xy et des xz; et, vu que chacune des mêmes projections de ds peut, sauf erreurs négligeables, être prise égale à $dx = x'ds$ ou, par suite, à ds, les deux dérivées y'', z'' sont, en résumé, les courbures de ces deux projections. Donc la formule (30) [p. 249], réduite à $d\theta = \sqrt{y''^2 + z''^2}\,ds$, exprime alors que, *si l'on projette un élément d'arc ds sur deux plans rectangulaires se croisant suivant sa tangente, les angles de contingence et les courbures de ses deux projections auront pour sommes respectives de leurs carrés les carrés mêmes de son angle de contingence et de sa propre courbure.* De plus, d'après les formules (25) [p. 210*], *le rayon* R *de cette courbure fera, avec les plans des deux projections, des angles ayant leurs cosinus* Ry'' *et* Rz'' *respectivement proportionnels aux courbures* y'' *et* z'' *de celles-ci.* »

Page 217*. Accentuer, sur la figure, le second T, en remontant.

Page 277*, ligne 9, à la fin, rétablir la lettre δ, ou lire $\frac{r'z'}{rz}\delta^2$.

Page 284*, ligne 15 en remontant, *après* Ch. Dupin, *ajouter, en note au bas de la page :*

« Le géomètre français Binet, de son côté, a, vers la même époque que Ch. Dupin sinon un peu avant, découvert ce système triple orthogonal constitué par les surfaces homofocales du second degré, et reconnu aussi que ces surfaces s'intersectent mutuellement suivant leurs lignes de courbure (*Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, mai 1813, p. 59; *voir* aussi, dans les *Développements de Géométrie*, par Ch. Dupin, la note de la page 305). »

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARTIE COMPLÉMENTAIRE.

COMPLÉMENT A LA DEUXIÈME LEÇON.

CALCUL DE LA DÉRIVÉE D'UNE SÉRIE.

13*. — Suite : dérivée d'une série.

Quand une fonction S de x, supposée, bien entendu, graduellement variable, est définie, au moins entre certaines limites, par une série convergente $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ et que, pour une suite continue de valeurs de x comprises entre ces limites, les dérivées des divers termes de la série forment une nouvelle série convergente, celle-ci y égale la dérivée de la première S.

Pour démontrer cette proposition, observons que, si R_n désigne un terme complémentaire tendant vers zéro lorsque n grandit de plus en plus, on a

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n,$$

et R_n, différence de deux fonctions, S d'une part, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ d'autre part, pourvues par hypothèse d'une dérivée, en a également une ou est, comme ces deux fonctions, graduellement variable avec x.

Or le fait de la décroissance indéfinie de R_n exige que sa dérivée R'_n, ou bien ne tende vers aucune limite pour n grandissant, ou bien tende vers zéro. En effet, si R'_n tendait, dans un très petit intervalle

comprenant la valeur considérée x, vers d'autres limites que zéro, ces limites seraient déjà presque atteintes en donnant à n une valeur assez grande, et tous les accroissements ultérieurs possibles de n n'influeraient pour ainsi dire plus sur R'_n. Cela posé, on pourrait prendre l'intervalle dont il s'agit assez petit pour que, dans le cas de cette première valeur déjà très grande de n, la fonction, de grandeur notable par hypothèse et graduellement variable, $S' - (u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n) = R'_n$, y eût presque la même valeur d'un bout à l'autre; et alors cette valeur constante continuerait à y être celle de R'_n, c'est-à-dire, sensiblement, celle du rapport $\frac{\Delta R_n}{\Delta x}$ de deux accroissements simultanés de R_n et de x, même quand n deviendrait incomparablement plus grand et R_n incomparablement plus voisin de zéro qu'ils n'étaient d'abord. Or il est évidemment impossible d'admettre que, dans l'intervalle déterminé en question, R_n varie, toujours suivant le même sens, avec une pareille rapidité notable, à moins qu'il ne puisse s'y écarter de zéro d'une manière sensible; ce qui n'est pas. Ainsi, il faut ou que R'_n tende vers la limite zéro quand n grandit, ou que R'_n ne s'approche indéfiniment d'aucune limite. La somme $u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n$, égale identiquement à $S' - R'_n$, tend vers S' dans le premier cas et ne converge pas dans le second. Donc, *toutes les fois que la série* $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots$ *est convergente dans une étendue finie, elle y exprime bien la dérivée de la série proposée* $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$.

Dans le cas contraire (c'est-à-dire quand la série $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots$ ne convergera pas), une étude spéciale du reste R_n sera nécessaire pour obtenir la dérivée de la fonction S. Ce cas où, lorsque n grandit, la fonction R_n tend vers zéro, mais en finissant par varier tellement vite avec x que sa dérivée n'y tend pas, se présente très souvent pour les valeurs extrêmes de x, c'est-à-dire pour les limites en dehors desquelles la série S diverge : car la valeur absolue de R_n, très petite encore à ces limites, est sensible au delà, et y croît nécessairement d'une manière rapide. Mais il peut aussi se produire pour toutes les valeurs de x, quand les termes très éloignés et *fort petits*, comme u_n, de la série, sont des fonctions de x qui varient par *courtes* oscillations, ou dont les changements consistent en accroissements et décroissements alternatifs se succédant de plus en plus vite à mesure que l'indice n augmente. Alors le terme complémentaire R_n, pour neutraliser ces inégalités imperceptibles qui n'existent pas dans la fonction S, mais qui tiennent au genre de décomposition ou de développement auquel on la soumet, présente des *inégalités* analogues de signe contraire; et si, n grandissant, ces inégalités finissent par de-

venir aussi courtes que petites, les rapports, $\frac{\Delta R_n}{\Delta x}$, de très faibles accroissements simultanés, donnés à R_n et à x, peuvent garder à peu près les mêmes valeurs absolues moyennes, quand on y fait décroître à la fois Δx et ΔR_n pendant que n augmente. Donc la dérivée R'_n, sensiblement égale à $\frac{\Delta R_n}{\Delta x}$, ne tend pas, pour n grandissant, vers zéro, ni, comme on vient de voir, vers aucune limite déterminée fonction de x. Et il en est évidemment de même de la somme

$$u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n = S' - R'_n,$$

alors impropre, par conséquent, à exprimer la dérivée de la série proposée $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$.

Soit, comme exemple de la règle ci-dessus, une série ordonnée suivant les puissances de x à exposants entiers et positifs, ou de la forme

$$(5) \qquad S = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

dans laquelle le rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ de deux coefficients successifs est supposé tendre en valeur absolue, quand n grandit, vers une limite déterminée λ. Cette série converge pour les valeurs absolues de x moindres que $\frac{1}{\lambda}$ et diverge pour les valeurs absolues de x supérieures à $\frac{1}{\lambda}$, vu que le rapport d'un terme au précédent y tend vers la limite $\pm \lambda x$, comprise entre 0 et ± 1 dans le premier cas, supérieure à l'unité (en valeur absolue) dans le second. Quant aux valeurs extrêmes $x = \pm \frac{1}{\lambda}$, elles peuvent rendre la série convergente ou divergente, suivant que le rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n} x$ de deux termes consécutifs y est en valeur absolue plus ou moins inférieur à l'unité et suivant la succession des signes des termes.

Cela posé, en prenant la dérivée des divers termes du second membre de (5), on obtient la nouvelle série

$$(6) \qquad A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + n A_n x^{n-1} + (n+1) A_{n+1} x^n + \ldots,$$

dans laquelle le rapport, $\frac{n+1}{n} \frac{A_{n+1}}{A_n} x$, d'un terme au précédent, égale ce qu'il était dans la série proposée, multiplié par le facteur $\frac{n+1}{n}$ ou augmenté de sa $n^{\text{ième}}$ partie. Donc les termes décroissent moins vite dans la série dérivée, qui pourra, par suite, devenir divergente à l'une

ou à l'autre des valeurs extrêmes $x = \pm \frac{1}{\lambda}$, dans des cas où la série proposée y converge encore. Mais la limite vers laquelle tend ce rapport $\frac{n+1}{n} \frac{A_{n+1}}{A_n} x$, quand n grandit indéfiniment, est toujours λx, et, par conséquent, la série (6) se trouve convergente *entre* les mêmes limites $x = \pm \frac{1}{\lambda}$ que la proposée (5), sinon toujours *à* ces limites mêmes. Ainsi, *la dérivée d'une série de la forme* (5) *peut s'obtenir en faisant simplement la somme des dérivées de ses termes.*



COMPLÉMENT A LA TROISIÈME LEÇON.

ANALOGIES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES; FONCTIONS HYPERBOLIQUES; EXPONENTIELLES IMAGINAIRES; ETC.

18.* — Discontinuités spéciales à la fonction logarithmique ou à d'autres fonctions transcendantes.

Parmi les fonctions transcendantes considérées jusqu'à présent, il en est trois, $\log z$, $\arcsin z$ et $\arccos z$, qui se distinguent des autres en ce qu'elles n'ont plus de valeurs (réelles) lorsque la variable z y sort d'un certain intervalle. Cet intervalle s'étend, pour la fonction logarithmique, de $z=0$ à $z=\infty$, et, pour les fonctions arcsinus et arccosinus, de $z=-1$ à $z=+1$. Mais la fonction logarithmique est la seule des trois qui n'admette qu'une valeur pour chaque valeur de la variable et, par conséquent, la seule de toutes les fonctions transcendantes usuelles qui, dans le voisinage d'une limite au delà de laquelle elle cesse d'exister, ne présente ainsi qu'une suite de valeurs. Or ce caractère la distingue également des fonctions algébriques contenant des radicaux d'indice pair ($u=\pm\sqrt{z}$ ou $u=\frac{1}{\pm\sqrt{z}}$, par exemple, racines des équations $u^2-z=0$, $zu^2-1=0$), ou des fonctions algébriques implicites analogues à celles-là, qui, comme $\log z$, n'existent plus au delà d'une certaine limite; car, en deçà, ces fonctions ont, en revanche, plus d'une valeur.

Il faut observer en outre que $\log z$ grandit indéfiniment (en valeur absolue) à l'approche de la limite $z=0$, sans que ce soit à l'occasion d'une fraction dont le dénominateur s'annulerait, mais uniquement par suite de ce fait, que la variable z, incapable de devenir négative, ne s'annule pas sans que la fonction, simple exposant susceptible de prendre toutes les valeurs, ait reçu celles, qui sont négatives et très grandes, qu'elle n'avait pas eues encore. Ainsi le genre de discontinuité que présente, pour $z=0$, la fonction $\log z$, diffère essentiellement de celui des discontinuités que comportent les fonctions algébriques, comme il sera, du reste, démontré complètement plus

loin, quand nous nous occuperons des points singuliers des courbes planes.

En combinant deux fonctions, dont l'une devienne infinie pour une valeur finie de la variable, on peut, quand elles ne sont pas algébriques (du moins toutes les deux), obtenir de nouvelles espèces de discontinuités.

Par exemple, la combinaison d'un quotient et d'un logarithme donne la fonction assez simple $\frac{1}{\log z}$, dans laquelle la valeur infinie de $\log z$ en produit une égale à zéro; de sorte que la fonction ainsi obtenue s'étend, comme $\log z$, de $z=0$ à $z=\infty$, mais en ayant à la première de ces limites une valeur nulle, c'est-à-dire finie et parfaitement déterminée, par laquelle commence *brusquement* la série unique des valeurs de la fonction. Et l'on aurait, non seulement pour $x=-a$, un pareil commencement, mais aussi, pour $x=a$, une fin non moins brusque, en prenant, au lieu de $\frac{1}{\log z}$, la fonction un peu plus compliquée $\frac{1}{\log(a^2-x^2)}$.

De même, si l'on observe que la fonction e^u est très dissemblable aux deux limites $u=-\infty$ et $u=\infty$, puisqu'elle se trouve finie à la première et infinie à la seconde, on verra qu'il suffit de faire succéder l'une de ces deux valeurs à l'autre, en prenant u égal à une fraction, $\frac{1}{z}$ par exemple, qui présente le saut de $\mp\infty$ à $\pm\infty$ ordinaire aux quotients, pour produire encore une autre sorte de discontinuité, consistant dans un brusque passage d'une valeur finie à une valeur infinie. Or on verra, à l'endroit cité tout à l'heure (où il sera question des points singuliers des courbes planes), que cette autre sorte de discontinuité est étrangère, comme les précédentes, aux fonctions algébriques, lesquelles cessent d'être continues soit par un simple passage par l'infini avec ou sans changement de signe, comme dans les fractions rationnelles, soit par la réunion de deux séries finies de valeurs qui se terminent à leur jonction, comme dans l'exemple $u=\pm\sqrt{z}$, soit, enfin, par la disparition simultanée de deux séries de valeurs devenant infinies, comme dans l'autre exemple donné $u=\frac{1}{\pm\sqrt{z}}$.

19*. — Sinus et cosinus de la somme de deux arcs. Formule de Moivre.

La formule presque évidente $\cos^2 u+\sin^2 u=1$ peut être aisément généralisée. Remarquons, dans ce but, que nous aurions pu l'établir

en observant que chacune des deux fonctions $\cos u$, $\sin u$ a l'autre pour dérivée, sauf un changement de signe lorsqu'il s'agit du cosinus, et que, par suite, d'après la règle donnée au n° 11 (p. 37) pour un produit de deux facteurs, les deux termes $\cos^2 u$, $\sin^2 u$ ont respectivement les dérivées $-2\cos u \sin u$, $2\sin u\cos u$, égales et contraires. La somme de ces deux termes, ayant ainsi sa dérivée constamment nulle, est donc invariable, en vertu d'un théorème de la deuxième Leçon (p. 33), et l'on peut y faire $u=0$, ce qui, vu les valeurs simples $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, la réduit à l'unité. Or le même fait de l'égalité, au signe près, des dérivées des deux termes persistera, si l'on remplace les seconds facteurs $\cos u$, $\sin u$ par le cosinus et le sinus d'un arc v, non plus égal à u, mais inférieur à u d'une quantité positive ou négative constante $u - v = \mathrm{D}$; de sorte que, u continuant, par exemple, à être la variable indépendante, de petits accroissements simultanés Δu, Δv de u et de v soient encore égaux, et que les rapports $\frac{\Delta \cos v}{\Delta u}$, $\frac{\Delta \sin v}{\Delta u}$ puissent être remplacés par $\frac{\Delta \cos v}{\Delta v}$, $\frac{\Delta \sin v}{\Delta v}$, ou, à la limite, les dérivées de $\cos v$ et $\sin v$ être évaluées comme si v était la variable indépendante. Alors, en effet, les deux produits $\cos u \cos v$, $\sin u \sin v$ ont respectivement pour dérivées les expressions égales et contraires

$$-\cos u \sin v - \sin u \cos v \quad \text{et} \quad \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

La somme $\cos u \cos v + \sin u \sin v$ est donc encore invariable, la même qu'à l'instant où $v=0$ et où elle se réduit à $\cos u = \cos(v+\mathrm{D}) = \cos \mathrm{D}$. Ainsi l'expression $\cos u \cos v + \sin u \sin v$, où u et v ont été censés d'abord quelconques et ont varié ensuite de manière à conserver entre eux leur différence primitive $\mathrm{D} = u - v$, représente le cosinus de cette différence. Il vient donc comme généralisation de la formule (16) [p. 58], quels que soient les deux arcs u et v,

$$(17) \qquad \cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

Mais cette relation (17) en donne évidemment une analogue pour le sinus de la différence de deux arcs u et v; car un tel sinus, $\sin(u-v)$, peut être considéré comme le cosinus du complément

$$\frac{\pi}{2} - (u-v) = \left(\frac{\pi}{2} - v\right) - u;$$

et ce complément est lui-même la différence des deux arcs $\frac{\pi}{2} - v$, u, dont le premier a, pour sinus, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v$ et,

pour cosinus, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+v\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=-\sin v$. Il vient donc, en remplaçant, dans (17), u par $\frac{\pi}{2}-v$ et v par u,

$$(18)\qquad \sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v.$$

Celle-ci aurait pu d'ailleurs se démontrer directement comme la précédente (17), en remarquant que les deux termes $\sin u\cos v$, $+\cos u\sin v$, si l'on y prend encore $u+v=$ une constante D, ont les deux dérivées, égales et contraires,

$$+\sin u\sin v+\cos u\cos v \quad\text{et}\quad -\cos u\cos v-\sin u\sin v;$$

de sorte que leur somme, $\sin u\cos v+\cos u\sin v$, est constante et exprimée par la valeur $\sin D=\sin(u+v)$, à laquelle elle se réduit pour $v=0$.

Enfin, dans les deux formules (17) et (18) où le signe de v est quelconque, rien n'empêche de changer v en $-v$, pourvu qu'on change, par le fait même,

$$\cos v \text{ en } \cos(-v)=\cos v \qquad\text{et}\qquad \sin v \text{ en } \sin(-v)=-\sin v,$$

le nouvel arc v pouvant être, bien entendu, comme le premier, positif ou négatif à volonté. Il vient donc les formules générales suivantes du cosinus et du sinus de la somme de deux arcs :

$$(19)\qquad \begin{cases}\cos(u\pm v)=\cos u\cos v\mp\sin u\sin v,\\ \sin(u\pm v)=\sin u\cos v\pm\cos u\sin v.\end{cases}$$

Il en résulte, comme on l'a démontré en Trigonométrie, d'autres formules simples, également utiles, qui permettent, soit de calculer $\tang(u\pm v)$ au moyen de $\tang u$ et $\tang v$, ou $\cos 2u$, $\cos\frac{u}{2}$, $\sin\frac{u}{2}$, $\tang\frac{u}{2}$ au moyen de $\cos u$, soit de convertir la demi-somme ou la demi-différence de deux sinus ou cosinus en un produit de deux facteurs dont chacun est lui-même un cosinus ou un sinus.

Mais cherchons ici, pour former les expressions (19) de $\cos(u+v)$ et $\sin(u+v)$ par la combinaison de $\cos u$, $\sin u$, $\cos v$, $\sin v$, quelque règle simple, qui soit susceptible d'être étendue aux cosinus et sinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs.

Les seconds membres des formules (19), pris ensemble, contiennent, aux signes près, tous les termes du produit de $\cos u+\sin u$ par $\cos v+\sin v$. Ceux d'entre ces termes où les facteurs sinus sont en nombre pair (zéro ou 2) composent $\cos(u+v)$, mais avec autant

de changements de signe pour chaque terme que ce terme a de *couples* de facteurs sinus, savoir, pas de changement dans $\cos u \cos v$ et un changement dans $\sin u \sin v$. Et quant aux termes ($\sin u \cos v$, $\cos u \sin v$) où les facteurs sinus sont en nombre impair, termes formant en tout $\sin(u+v)$, on peut dire que chacun d'eux éprouve encore autant de changements de signe qu'il contient de couples de facteurs sinus (c'est-à-dire, ici, zéro). Or il est aisé de voir que le même mode de combinaison subsiste quand on ajoute un arc de plus, w, ou que l'on multiplie $\cos(u+v)+\sin(u+v)$ par $\cos w+\sin w$, en remplaçant $\cos(u+v)$, $\sin(u+v)$ par leurs expressions précédentes et effectuant, bien entendu, le changement de signe de $\sin(u+v)\sin w$. En effet, le cosinus de $u+v+w$ contiendra, outre les termes composant le produit $\cos(u+v)\cos w$, termes où les facteurs sinus resteront en même nombre pair que dans $\cos(u+v)$, les termes provenant de $\sin(u+v)$ multiplié par $\sin w$, termes qui éprouveront bien le changement de signe obligé en acquérant le facteur $\sin w$, car ils passeront ainsi au rang de ceux où les facteurs sinus sont en nombre pair. De même, le sinus de $u+v+w$ se composera des termes formant $\sin(u+v)\cos w$, où les facteurs sinus sont respectivement en même nombre impair que dans $\sin(u+v)$, et de ceux de $\cos(u+v)\sin w$, où les facteurs sinus, partout en nombre pair, provenant de $\cos(u+v)$, deviennent en nombre impair par l'adjonction de $\sin w$. Et il est clair que le même raisonnement s'appliquera si l'on ajoute successivement autant d'arcs qu'on le voudra.

Ainsi, le mode de combinaison de $\cos u$, $\sin u$, $\cos v$, $\sin v$, $\cos w$, $\sin w$, ... qui est propre à fournir les expressions de $\cos(u+v+w+\ldots)$ et de $\sin(u+v+w+\ldots)$, ressemble beaucoup à la multiplication algébrique des binômes $\cos u+\sin u$, $\cos v+\sin v$, $\cos w+\sin w$, ...; mais il en diffère par une *tendance* (pour ainsi dire) de chaque nouveau sinus que l'on introduit, à faire changer, dans le résultat, les signes des termes où il paraît comme facteur, tendance qui *se satisfait* en quelque sorte, ou produit un *changement effectif* de signe, en s'associant dans le même terme à une tendance analogue, c'est-à-dire par le groupement deux à deux des facteurs sinus y paraissant. Et, lorsqu'elle ne peut produire tout son effet, c'est-à-dire dans les termes où il reste un facteur sinus non encore employé après que tous les autres se sont associés par couples pour changer le signe autant de fois qu'il y a de couples, la tendance en question subsiste pour le cas où le résultat devrait entrer dans une combinaison ultérieure; car l'ensemble de tous les termes du produit qui ont ainsi des facteurs

sinus en nombre impair compose justement le sinus de la somme des arcs considérés et se comporterait, par conséquent, comme un sinus, si l'on introduisait un arc de plus, tandis que l'ensemble des termes où les facteurs sinus sont en nombre pair compose le cosinus de la même somme et se comporterait désormais comme un simple facteur algébrique.

Il ne reste plus, pour pouvoir indiquer à la manière d'une multiplication, tout en l'en distinguant, cette sorte d'opération de combinaison propre à former les expressions du cosinus et du sinus d'une somme, qu'à marquer, à l'aide d'un caractère spécial, les facteurs auxquels on attribue la tendance à faire changer de signe les termes qui les contiennent. Or ce caractère devra équivaloir à un changement de signe, ou au facteur -1, pour chaque couple de fois qu'il paraîtra dans un terme; et, comme il affectera de la tendance en question le terme tout entier, quel que soit le facteur qui l'introduise, on pourra le séparer de celui-ci pour le placer ailleurs dans le terme, c'est-à-dire l'assimiler lui-même à un facteur. Donc, sa répétition ou ce qu'on peut appeler son *carré* donnant d'ailleurs -1, on devra, vu son analogie évidente avec une racine carrée, mais sans avoir, bien entendu, à lui en attribuer la signification, l'écrire lui-même $\sqrt{-1}$. Ainsi, le signe qu'on cherche pour en affecter ici les sinus n'est autre que le symbole, dit *imaginaire*, $\sqrt{-1}$, introduit déjà, dans l'étude des équations du second degré de la forme $(x-\alpha)^2 = -\beta^2$, par un désir analogue de modifier le sens de la multiplication de manière à n'en faire, au besoin, qu'un mode de combinaison où une quantité négative $-\beta^2$ puisse être censée le produit de deux quantités égales. Ce symbole $\sqrt{-1}$ aura le double avantage : 1° d'indiquer clairement le changement de signe à effectuer pour chaque couple de fois qu'il se trouvera dans un terme du résultat définitif; 2° de subsister encore une fois dans les termes qui l'auront contenu en nombre impair, après qu'on l'en aura supprimé autant que possible en effectuant les changements de signe qu'impliquait sa répétition, et, par conséquent, de maintenir l'ensemble de ces termes, où il restera comme facteur commun, et qu'on appelle, pour abréger, la *partie imaginaire* du résultat, essentiellement distinct de l'ensemble des autres termes, d'où $\sqrt{-1}$ aura complètement disparu et qu'on appelle la *partie réelle* du résultat. Ainsi la formule obtenue, purement *symbolique* en elle-même, c'est-à-dire n'exprimant aucun résultat quantitatif saisissable, mais seulement une certaine manière de combiner des caractères ou des signes, se dédoublera finalement en deux formules qui, elles, auront

un sens concret et représenteront de vraies relations arithmétiques entre quantités.

Tous ces développements, utiles pour bien faire comprendre comment le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$ permet d'indiquer *simplement* certaines relations assez *compliquées* entre quantités réelles, conduisent donc à la formule générale, qu'ils expliquent suffisamment,

$$(20)\quad \begin{cases} \cos(u+v+w+\ldots)+\sqrt{-1}\sin(u+v+w+\ldots) \\ \quad = (\cos u+\sqrt{-1}\sin u)(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)(\cos w+\sqrt{-1}\sin w)\ldots \end{cases}$$

Celle-ci, quand les arcs u, v, w, ... supposés au nombre de m, deviennent égaux, se réduit à la suivante, dite *formule de Moivre*,

$$(21)\qquad \cos mu+\sqrt{-1}\sin mu=(\cos u+\sqrt{-1}\sin u)^m,$$

qui contient, comme on voit, les expressions du cosinus et du sinus d'un multiple quelconque mu d'un arc u en fonction algébrique et entière du cosinus et du sinus de cet arc. Or, dans le second membre de (21), l'effectuation des calculs (y compris la réduction des termes semblables) se fera évidemment par le même mécanisme qui a conduit à la formule de la $m^{\text{ième}}$ puissance du binôme, et elle donnera

$$\cos^m u+\frac{m}{1}\sqrt{-1}\cos^{m-1}u\sin u+\frac{m(m-1)}{1.2}(\sqrt{-1})^2\cos^{m-2}u\sin^2 u+\ldots.$$

Enfin la substitution de -1 à chaque couple de facteurs symboliques $\sqrt{-1}$ et le groupement, d'une part, des termes de degré pair en $\sqrt{-1}$, pour en faire l'expression de $\cos mu$, d'autre part, des termes de degré impair en $\sqrt{-1}$, pour en faire, après la suppression du facteur subsistant $\sqrt{-1}$, l'expression de $\sin mu$, dédoubleront bien cette formule symbolique (21) en deux, parfaitement concrètes, qui sont les formules cherchées de $\cos mu$ et de $\sin mu$:

$$(22)\quad \begin{cases} \cos mu=\cos^m u-\dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}u\sin^2 u \\ \qquad +\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}u\sin^4 u-\ldots, \\ \sin mu=\dfrac{m}{1}\cos^{m-1}u\sin u-\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}u\sin^3 u \\ \qquad +\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}u\sin^5 u-\ldots. \end{cases}$$

Les seconds membres se terminent, comme dans la formule du binôme, par le terme après lequel la loi évidente de formation des coef-

ficients introduirait celui des facteurs décroissants successifs m, $m-1$, $m-2$, ... qui est zéro, dont la présence annule tous les termes ultérieurs.

20* — Équations algébriques, à racines réelles, qui se résolvent trigonométriquement.

On remarquera que $\sin u$ ne paraît dans l'expression (22) de $\cos mu$ que par les puissances entières de son carré $\sin^2 u$. En y remplaçant celui-ci par $1-\cos^2 u$, puis, effectuant les multiplications et réductions, il est clair que $\cos mu$, exprimé en fonction de $\cos u$, deviendra un simple polynôme du $m^{\text{ième}}$ degré, à coefficients entiers.

Si l'on prend pour $\cos mu$ le cosinus d'un arc, a, compris (quel que soit ce cosinus) entre zéro et π, et si l'on pose $\cos u = x$, la première formule (22) se trouvera donc changée en une certaine équation du $m^{\text{ième}}$ degré en x, dont tous les coefficients seront commensurables, sauf, en général, le terme connu, $\cos a$, du premier membre. Or cette équation a autant de racines (réelles) que peut en admettre une équation de son degré, savoir m, et, chose curieuse, ces m racines, généralement incommensurables ou même, le plus souvent, impossibles à exprimer *algébriquement* (c'est-à-dire fonctions *algébriques implicites* de $\cos a$), s'expriment, au contraire, *trigonométriquement*, avec une extrême facilité. En effet, la signification même de la première formule (22) montre qu'on rend le second membre égal au premier en posant $x = \cos u$ et en prenant u égal à la $m^{\text{ième}}$ partie de tout arc mu ayant $\cos a$ pour cosinus. Or il faut et il suffit, pour que $\cos mu = \cos a$, que l'arc mu dépasse soit $+a$, soit $-a$, d'un nombre entier i de circonférences (nombre pouvant être 0, ± 1, ± 2, ...). L'équation algébrique considérée admet donc toutes les solutions que représente la formule

$$x = \cos \frac{\pm a + 2i\pi}{m}.$$

Il est inutile d'y prendre le terme $\pm a$ avec le double signe $\pm$, vu qu'on ne modifiera pas le cosinus (fonction paire de son arc) en changeant, par exemple, $-a + 2i\pi$ en $a - 2i\pi$, ce qui revient à prendre $a + 2i\pi$ avec i de signe contraire. Et l'on pourra de plus, en s'en tenant ainsi à

$$x = \cos \frac{a + 2i\pi}{m},$$

ne donner à i que les valeurs consécutives 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$, comprises dans un intervalle égal à m; car, faire croître ou décroître

i de m unités serait ajouter à l'arc $\frac{a+2i\pi}{m}$ ou en retrancher une circonférence 2π, modification sans influence sur le cosinus. Mais les m valeurs obtenues en posant $i=0, =1, =2, \ldots, =m-1$ sont bien toutes distinctes. En effet, les arcs $\frac{a}{m}$, $\frac{a+2\pi}{m}$, $\frac{a+4\pi}{m}$, ..., $\frac{a+2(m-1)\pi}{m}$ se succédant à intervalles égaux entre zéro et 2π, on peut se les figurer, sur une circonférence divisée en m parties égales, comptés tous à partir du commencement de la première division, et se terminant ainsi à des points compris dans les premières moitiés des divisions $\left(\text{vu que } \frac{a}{m} \text{ est positif et inférieur à la moitié de } \frac{2\pi}{m}\right)$. Or, si l'on considère deux de ces divisions qui soient symétriques par rapport au diamètre issu de l'origine, la première moitié de l'une a pour symétrique la seconde moitié de l'autre, et, par conséquent, deux arcs se terminant respectivement à l'intérieur de leurs premières moitiés n'ont pas leurs secondes extrémités symétriques ni, par suite, leurs cosinus égaux. Il ne peut en être autrement que dans les cas exceptionnels où ces extrémités atteignent les limites entre lesquelles elles se meuvent, ou viennent se placer soit, pour $a=0$, aux points mêmes de division de la circonférence, soit, pour $a=\pi$, au milieu précis des divisions : alors les racines deviennent égales deux à deux, sauf celles qui peuvent correspondre à un arc $\frac{a+2i\pi}{m}$ ou nul ou égal à π et dont la seconde extrémité serait à elle-même sa propre symétrique par rapport au diamètre considéré.

Quand, au contraire, $a=\frac{\pi}{2}$ ou $\cos a=0$, les secondes extrémités des arcs $\frac{a+2i\pi}{m}$ tombent aux premiers quarts des divisions et, pour ceux d'entre eux qui excèdent une demi-circonférence, elles sont les symétriques des points situés aux trois quarts des divisions comprises dans la première demi-circonférence. Donc on peut alors partager cette demi-circonférence en divisions quatre fois moindres, exprimées par $\frac{\pi}{2m}$, et prendre pour racines x les cosinus de tous les arcs, de la forme $\frac{(2j+1)\pi}{2m}$, s'y terminant à une division d'ordre impair : le nombre entier j reçoit les m valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, et tous les arcs à considérer, rangés par ordre de cosinus décroissants, se trouvent compris entre zéro et π.

Dans le cas $m=3$, mais a étant d'ailleurs quelconque entre zéro

et π, l'équation que donne ainsi la première formule (22),

$$\cos a = 4x^3 - 3x(1 - x^2) \qquad \text{ou} \qquad x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos a}{4} = 0,$$

est précisément celle à laquelle se ramène la plus générale du troisième degré débarrassée de son second terme

$$X^3 \mp \frac{3}{4}A^2X - \frac{k}{4}A^3 = 0$$

(où $\mp \frac{3}{4}A^2$ et $-\frac{k}{4}A^3$ sont deux coefficients quelconques), lorsqu'on y pose $X = Ax$, ce qui la réduit à $x^3 \mp \frac{3}{4}x - \frac{k}{4} = 0$, et lorsqu'on admet qu'elle a trois racines (réelles). En effet, cette dernière condition implique d'abord que le second terme de l'équation soit $-\frac{3}{4}x$ et non $+\frac{3}{4}x$; sans quoi le premier membre, $x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{k}{4}$, croîtrait évidemment toujours avec x et, allant de $-\infty$ à $+\infty$, ne passerait qu'une fois par zéro. Mais elle implique de plus que k soit compris entre -1 et $+1$ ou soit bien de la forme $\cos a$; car, si l'on pose $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{k}{4}$, la dérivée $f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$, positive pour x variant de $-\infty$ à $-\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$ à ∞, négative pour x compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, montre que $f(x)$, négatif pour $x = -\infty$ et positif pour $x = \infty$, s'annule trois fois à la condition nécessaire et suffisante de s'annuler une dans chacune de ses trois périodes ou alternatives d'accroissement ou de décroissement, c'est-à-dire pourvu qu'on ait $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, ou bien $\left[\text{vu que } f\left(\mp\frac{1}{2}\right) = \frac{\pm 1 - k}{4}\right]$ $k < 1$ et $k > -1$. Ainsi, toutes les équations du troisième degré qui ont trois racines (réelles) peuvent se ramener à celle-ci, $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos a}{4} = 0$, dont les solutions sont

$$x = \cos\frac{a}{3}, \qquad x = \cos\frac{a - 2\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad x = \cos\frac{a + 2\pi}{3}.$$

Dans le cas où m est un nombre pair $2n$, l'expression (22) de $\cos mu$ ne contient $\cos u$ que par ses puissances paires et, en y substituant $1 - \sin^2 u$ à $\cos^2 u$, elle devient un polynôme du $m^{\text{ième}}$ degré en $\sin u$ ou, plutôt, du $n^{\text{ième}}$ degré en $\sin^2 u$. Si l'on remplace alors, dans la première formule (22), $\cos mu$ par $\cos a$ et $\sin u$ par x, l'équation du $2n^{\text{ième}}$ degré en x ainsi formée admet évidemment toutes les solutions

qu'on obtient en posant encore $mu = \pm a - 2i\pi$, ou $u = \frac{\pm a + 2i\pi}{2n}$. Il en résulte $x = \sin \frac{\pm a - 2i\pi}{2n} = \pm \sin \frac{a \mp 2i\pi}{2n}$, qu'on peut écrire simplement

$$x = \pm \sin \frac{a - 2i\pi}{2n},$$

puisque le nombre entier i a un signe quelconque et désigne par lui-même tout ce qu'exprime $\pm i$. Or il suffit ici, vu le double signe des racines, que i reçoive les n valeurs consécutives $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$; car faire varier i de n unités, ce serait faire varier de π l'arc $\frac{a - 2i\pi}{2n}$ et, par conséquent, changer simplement le signe de son sinus. Ainsi, la valeur absolue des racines s'obtiendra par la division d'une demi-circonférence en n parties $\frac{\pi}{n}$, sur la première moitié de chacune desquelles on mesurera un arc constant, $\frac{a}{2n}$, inférieur à une demi-division; les perpendiculaires, $\sin \frac{a - 2i\pi}{2n}$, abaissées des points ainsi obtenus sur le diamètre de base de la demi-circonférence, représenteront les valeurs absolues cherchées des racines. Elles seront bien toutes inégales; car les divisions du second quadrant auront leurs premières moitiés symétriques des secondes moitiés de celles du premier quadrant par rapport au rayon bissecteur de la demi-circonférence. Ce ne serait que dans les deux cas extrêmes $a = 0$, $a = \pi$, où les arcs $\frac{a - 2i\pi}{2n}$ se termineraient soit aux points de division, soit au milieu même des divisions, que les sinus construits dans le second quadrant seraient les symétriques et, par conséquent, les égaux de ceux du premier. L'équation considérée de degré $2n$, en x ou $\sin u$, a donc encore autant de racines (réelles) qu'il y a d'unités dans son degré.

Si l'on avait $\cos a = 0$ ou $a = \frac{\pi}{2}$, la constante $\frac{a}{2n}$ vaudrait le quart d'une division, et les arcs $\frac{a - 2i\pi}{2n}$ ne dépassant pas $\frac{\pi}{2}$ se termineraient au premier quart des divisions, tandis que les arcs $\frac{a - 2i\pi}{2n}$ excédant le premier quadrant auraient mêmes sinus que ceux qui, dans ce premier quadrant, se termineraient aux trois quarts des divisions. Il y aurait donc lieu de diviser la demi-circonférence en parties quatre fois moindres

que les premières, ou un quart de circonférence en $2n$ divisions égales $\frac{\pi}{4n}$, et de prendre pour valeurs absolues des racines les sinus des arcs $\frac{(2j+1)\pi}{4n}$ se terminant aux divisions impaires. Les racines seraient donc, par ordre de grandeur absolue croissante,

$$x = \pm \sin\frac{(2j+1)\pi}{4n},$$

où l'entier j recevrait successivement les n valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Passons maintenant à l'expression (22) de $\sin mu$. Comme elle contient les puissances impaires de $\sin u$, elle ne se prête jamais à l'élimination de $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$, à moins de perdre sa forme rationnelle. Mais on peut en éliminer $\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$ dans le cas où les exposants $m-1$, $m-3$, ... qui y affectent ce cosinus, sont pairs, c'est-à-dire quand m est un nombre impair $2n+1$. Alors elle devient un polynôme du degré $2n+1$ en $\sin u$.

Si donc, pareillement à ce qu'on vient de faire pour la première formule (22), on remplace dans la seconde (22), après élimination de $\cos u$, d'une part, $\sin mu$, c'est-à-dire $\sin(2n+1)u$, par $\sin a$, où a se trouvera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, d'autre part, $\sin u$ par x, l'équation du degré $2n+1$ ainsi obtenue sera satisfaite en choisissant l'arc $(2n+1)u$ de manière que son sinus égale $\sin a$. Cela suppose soit $(2n+1)u = a$, soit $(2n+1)u$ supplémentaire de a ou $(2n+1)u = \pi - a$, soit enfin $(2n+1)u$ égal à l'une ou à l'autre de ces valeurs a, $\pi - a$ augmentées d'un nombre entier i (positif ou négatif) de circonférences 2π. On aura donc pour x les deux formules

$$x = \sin\frac{a+2i\pi}{2n+1}, \qquad x = \sin\frac{\pi - a + 2i\pi}{2n+1}.$$

Mais la seconde n'est pas nécessaire; car il suffit de remplacer, dans la première, i par $-i+n$, pour que l'arc $\frac{a+2i\pi}{2n+1}$ devienne $\pi - \frac{\pi - a + 2i\pi}{2n+1}$ ou ait le sinus, $\sin\frac{\pi - a + 2i\pi}{2n+1}$, représenté par la seconde. Comme il est d'ailleurs évident qu'un accroissement de i égal à $2n+1$ ne ferait qu'ajouter 2π à l'arc $\frac{a+2i\pi}{2n+1}$, il suffira de prendre pour i les $2n+1$ valeurs $i=0$, $i=\pm 1$, $i=\pm 2$, ..., $i=\pm n$; ce qui donnera $2n+1$ arcs équidistants, compris entre les deux limites $\mp\pi$, et s'étendant.

sur la circonférence, depuis une *origine* ou première extrémité commune, jusqu'à une seconde extrémité située, respectivement, dans les diverses divisions de la circonférence qu'on aurait partagée en $2n+1$ parties égales en prenant l'origine pour milieu d'une division.

Les sinus de ces arcs seront généralement tous *inégaux*. Par exemple, si l'on prend $a=0$, ceux qui seront compris dans le premier quadrant auront la forme $\sin\frac{2i\pi}{2n+1}$ et ceux qui le seront dans le deuxième, en y remplaçant l'arc par son supplément $\pi-\frac{2i\pi}{2n+1}=\frac{2(n-i)-1}{2n+1}\pi$, auront la forme $\sin\frac{(2i+1)\pi}{2n+1}$; ce qui, pareille circonstance se produisant d'ailleurs dans les troisième et quatrième quadrants, fait que les diverses racines seront données par l'expression

$$x=\sin\frac{j\pi}{2n+1},$$

où l'arc restera inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, car j pourra y recevoir les $2n+1$ valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$.

Les formules (22) fournissent donc trois types d'équations, d'un degré m quelconque pour le premier type, pair pour le second et impair pour le troisième, dont les racines (réelles), en nombre égal à ce degré, sont représentées, dans le premier type, par les cosinus et, dans les deux autres, par les sinus d'arcs équidistants, que l'on construit au moyen de la division d'une circonférence en m parties égales. Or on sait que, dans toute équation ayant ainsi un nombre de racines (réelles) égal à son degré, le premier membre, quand on la met sous la forme $f(x)=0$, est identiquement le produit du coefficient du terme le plus élevé et de tous les facteurs binômes qu'on obtient en retranchant de la variable x chaque racine. Il suit donc de là que, si l'on pose, dans les deux premiers types, $\cos a=0$ ou $a=\frac{\pi}{2}$ et, dans le troisième, $\sin a=0$ ou $a=0$, afin de rendre les premiers membres $f(x)$ des équations dont il s'agit identiques à ce que sont les expressions (22) de $\cos mu$ ou de $\sin mu$ quand on n'y fait paraître comme variable x que $\cos u$ ou $\sin u$, ces expressions de $\cos mu$ et de $\sin mu$ pourront être décomposées en facteurs (réels), du premier degré par rapport à $\cos u$ ou $\sin u$. D'après les expressions des racines pour les valeurs de a indiquées, ces facteurs, à un coefficient constant près, seront de la forme $\cos u-\cos\frac{(2j+1)\pi}{2m}$,

dans le premier type, de la forme

$$\sin u \mp \sin\frac{(2j+1)\pi}{4n} = \left[\mp \sin\frac{(2j+1)\pi}{4n}\right]\left[1 \mp \frac{\sin u}{\sin\frac{(2j+1)\pi}{4n}}\right],$$

dans le second où $m = 2n$, et de la forme $\sin u - \sin\frac{j\pi}{2n+1}$, c'est-à-dire, sauf pour j nul,

$$\left(-\sin\frac{j\pi}{2n+1}\right)\left(1 - \frac{\sin u}{\sin\frac{j\pi}{2n+1}}\right),$$

dans le troisième où $m = 2n+1$: l'entier j reçoit, respectivement, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$ dans le premier cas, $0, 1, 2, \ldots, n-1$ dans le deuxième et $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ dans le troisième.

Obtenons complètement, en vue d'une recherche ultérieure importante, les formules de $\cos 2nu$ et de $\sin(2n+1)u$ que donnent ces décompositions en facteurs. Si nous y appelons respectivement A, B les produits du coefficient du terme le plus élevé par les facteurs constants de la forme $\mp \sin\frac{(2j+1)\pi}{4n}$ ou $-\sin\frac{j\pi}{2n+1}$, un groupement évident des autres facteurs donnera

$$\cos 2nu = \mathrm{A}\left(1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{\pi}{4n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{3\pi}{4n}}\right) \times \left(1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{5\pi}{4n}}\right)\cdots\left[1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}}\right],$$

$$\sin(2n+1)u = \mathrm{B}\sin u\left(1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right) \times \left(1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Enfin les coefficients A et B se déterminent le plus simplement possible en faisant tendre u et, par conséquent, $\sin u$ vers zéro. L'expression de $\cos 2nu$ tend vers A et, comme $\cos 2nu$ devient $\cos 0 = 1$ à la limite, on doit avoir $\mathrm{A} = 1$. Quant à l'expression de $\sin(2n+1)u$, son rapport à $\sin u$, savoir $\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}$, tend de même vers B. Or, si l'on considère le sinus d'un très petit arc quelconque α, on peut le re-

garder comme l'accroissement qu'éprouverait la fonction $\sin z$ pour l'accroissement α de la variable z supposée d'abord nulle; et le rapport $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ vaut par suite, d'après une formule du n° 10 (p. 35), la dérivée $\cos z$ prise pour une valeur de z intermédiaire entre zéro et α, dérivée qui croît jusqu'à 1 quand α tend vers zéro. Ainsi le rapport du sinus à l'arc vaut presque 1 et peut être exprimé par $1-\varepsilon$ si ε désigne une très petite quantité positive s'annulant avec l'arc. Remplaçons donc $\sin(2n+1)u$ par $(2n+1)u(1-\varepsilon)$ et, de même, $\sin u$ par $u(1-\varepsilon_1)$, où ε_1 sera une quantité analogue à ε. Nous verrons alors que le rapport $\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}$ tend vers $2n+1$; ce qui donne $B=2n+1$. Et les formules de $\cos 2nu$, $\sin(2n+1)u$ pourront s'écrire

$$(23)\quad \begin{cases} \cos 2nu = \left(1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{\pi}{4n}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{3\pi}{4n}}\right) \\ \qquad\qquad \times\left(1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{5\pi}{4n}}\right)\cdots\left[1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}}\right], \\ \sin(2n+1)u = (2n+1)\sin u\left(1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right) \\ \qquad\qquad \times\left(1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2n+1}}\right)\cdots \\ \qquad\qquad \times\left(1-\dfrac{\sin^2 u}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}\right). \end{cases}$$

On sait d'ailleurs que, si l'on effectue les multiplications des seconds membres et qu'on ordonne les deux résultats suivant les puissances ascendantes de $\sin u$, puissances paires pour la première formule et impaires pour la seconde, les coefficients des divers termes deviendront identiques à ceux des seconds membres des formules (22) où l'on ferait m égal respectivement soit à $2n$, soit à $2n+1$ et où l'on remplacerait $\cos^2 u$ par $1-\sin^2 u$ en effectuant de même les calculs. Or il suffira de barrer des expressions (22) et (23) de $\sin mu$ le facteur commun $m \sin u$ ou $(2n+1)\sin u$, pour que tous les seconds membres de (22) et (23) contiennent comme unique variable $(-\sin^2 u)$. Si donc on appelle celle-ci z, ou mieux $\frac{z}{m^2}$, afin que les coefficients restent finis quelque grand que m devienne, il y aura évidemment identité entre

les polynômes en z que donneront, une fois ces multiplications faites, les seconds membres de (22), et les produits effectués des facteurs du premier degré en z contenus dans les seconds membres de (23). L'expression de $\cos^2 u$ étant $1 + \frac{z}{m^2}$ et m valant soit $2n$, soit $2n+1$, les identités en question seront, après des réductions (dans chaque terme) évidentes,

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(1+\frac{z}{4n^2}\right)^n + \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{z}{4n^2}\right)^{n-1}\frac{z}{1.2} \\ &\quad + \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{2}{2n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{z}{4n^2}\right)^{n-2}\frac{z^2}{1.2.3.4}+\ldots \\ &\quad = \left(1+\frac{z}{4n^2\sin^2\frac{\pi}{4n}}\right)\left(1+\frac{z}{4n^2\sin^2\frac{3\pi}{4n}}\right) \\ &\qquad \times\left(1+\frac{z}{4n^2\sin^2\frac{5\pi}{4n}}\right)\cdots\left[1+\frac{z}{4n^2\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}}\right], \\ &\left[1+\frac{z}{(2n+1)^2}\right]^n \\ &\quad + \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\left[1+\frac{z}{(2n+1)^2}\right]^{n-1}\frac{z}{2.3} \\ &\quad + \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\left(1-\frac{3}{2n+1}\right)\left(1-\frac{4}{2n+1}\right) \\ &\qquad\qquad \times\left[1+\frac{z}{(2n+1)^2}\right]^{n-2}\frac{z^2}{2.3.4.5}+\ldots \\ &\quad = \left[1+\frac{z}{(2n+1)^2\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right]\left[1+\frac{z}{(2n+1)^2\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right]\cdots \\ &\qquad\qquad \times\left[1+\frac{z}{(2n+1)^2\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right]. \end{aligned} \right.$$

On remarquera qu'en supposant, pour fixer les idées, la variable z positive, tous les facteurs des seconds membres sont positifs, dans chacune de leurs parties, et aussi tous les termes et facteurs (variables) des premiers membres. De plus, si n grandit indéfiniment, les facteurs $\left(1+\frac{z}{4n^2}\right)^n$, $\left(1+\frac{z}{4n^2}\right)^{n-1}$, ..., et $\left[1+\frac{z}{(2n+1)^2}\right]^n$, $\left[1+\frac{z}{(2n+1)^2}\right]^{n-1}$, ... ne modifient les termes des premiers membres que dans un rapport insensible à la limite; car, en appliquant au premier d'entre eux, qui est le plus grand, la formule (3) de la

dernière Leçon [p. 40], on trouve pour sa valeur

$$1+\frac{z(1+\varepsilon)}{4n},$$

expression dont la limite est l'unité. Par *conséquent*, les premiers membres de (24), quand z est positif, tendent, à mesure que n grandit, à ne pas dépasser respectivement les deux expressions

$$1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{z}{1.2}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{2}{2n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}\right)\frac{z^2}{1.2.3.4}+\ldots,$$

$$1+\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\frac{z}{2.3}$$
$$+\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\left(1-\frac{3}{2n+1}\right)\left(1-\frac{4}{2n+1}\right)\frac{z^2}{2.3.4.5}+\ldots,$$

expressions très peu inférieures, dès que n est considérable, aux séries convergentes

$$(25)\qquad 1+\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2.3.4}+\ldots,\quad 1+\frac{z}{2.3}+\frac{z^2}{2.3.4.5}+\ldots,$$

qu'elles atteignent évidemment à la limite. Et non seulement les valeurs totales des premiers membres de (24) tendent ainsi vers (25), mais encore, dans ces premiers membres de (24), supposés ordonnés suivant les puissances ascendantes de z, les coefficients s'approchent, en nombre de plus en plus grand à mesure que n grandit, de ceux de (25); car, en développant par la formule du binôme les facteurs comme $\left(1+\frac{z}{4n^2}\right)^n$, on voit que les coefficients des diverses puissances de z y sont tous rendus extrêmement petits par le dénominateur n^2, élevé partout à une puissance dont l'exposant égale le nombre des facteurs $n, n-1, n-2, \ldots$ des numérateurs; ce qui annihile bien, à la limite, les fractions correspondantes et les parties de coefficients en provenant dans les deux séries que forment alors les premiers membres effectués de (24). Ces parties n'ajoutent rien de sensible, quant à la grandeur *absolue*, même aux coefficients très éloignés, où elles s'accumulent en nombre immense; car, toutes étant positives, leur somme, si l'on fait $z=1$, sera justement, dans chaque série, ce que la valeur même de la série gagne à leur présence, quantité dont on a reconnu l'annulation. Ainsi, les produits effectués des facteurs composant les *seconds membres* de (24) *tendent*, tant dans leur ensemble que considérés terme à terme, vers les deux séries convergentes (25), lorsqu'on y fait croître n indéfiniment.

21*. — Développements de $\cos x$ et de $\sin x$ en série.

Comme on a remarqué tout à l'heure (p. 19*) que le rapport d'un sinus à son arc u tend vers l'unité ou que $\sin u$ comporte l'expression algébrique u (avec une approximation relative indéfinie) quand u devient assez petit, les formules (22) et (23) [pp. 11* et 19*] permettront d'exprimer algébriquement, sous deux formes différentes et d'une manière aussi approchée qu'on le voudra, le cosinus et le sinus d'un arc x quelconque, de même que la formule (3) de la dernière Leçon (p. 40) nous a fourni l'expression algébrique indéfiniment approchée (4) [p. 42] de la fonction exponentielle. Il suffira, pour cela, d'y partager l'arc x soit en un très grand nombre pair $m = 2n$, soit en un très grand nombre impair $m = 2n+1$, de parties $u = \frac{x}{m}$, et de remplacer alors $\sin u$ par $u = \frac{x}{m}$ dans les seconds membres de (22) ou de (23) réduits à ne plus dépendre que de $\sin u$. Voyons ce que donnera ce procédé à la limite, ou quand m grandira indéfiniment.

Commençons par les formules (22). D'une part, les facteurs comme $\cos^m u$, $\cos^{m-1} u$, ... y tendront tous vers l'unité; car ils sont inférieurs à 1 en valeur absolue, et celui qui l'est le plus, $\cos^m u$, devenu $\left(1 - \sin^2 \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$, pourra s'écrire sensiblement, d'après la formule (3) [p. 40] de la dernière Leçon, $1 - \frac{m}{2} \sin^2 \frac{x}{m}$ ou encore, à fort peu près (en remplaçant le sinus de $\frac{x}{m}$ par son arc très petit), $1 - \frac{x^2}{2m}$, quantité qui tend vers l'unité lorsque m grandit. En réduisant donc $\cos u$ à 1, $\sin u$ à $\frac{x}{m}$, et $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$, ... à l'unité dans un nombre de termes des seconds membres de (22) de plus en plus grand à mesure que m grandit, on voit que ces termes conduisent respectivement aux deux expressions

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots, \qquad \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Et quant à ceux qui se trouvent plus éloignés dans les développements, comme, en valeur absolue, les facteurs $\cos u$ y sont moindres que 1, les facteurs $\sin u$ ou $\sin \frac{x}{m}$ moindres que $\frac{x}{m}$ et les facteurs $1 - \frac{1}{m}$, $1 - \frac{2}{m}$, $1 - \frac{3}{m}$, ... inférieurs à l'unité, ces termes n'atteignent pas, toujours

en valeur absolue, les termes analogues de la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = e^x,$$

qui comprend tous ceux des deux séries précédentes. Or on sait que les termes de celle-ci, très éloignés, pris avec un même signe et en nombre aussi grand qu'on veut, ont une somme tendant vers zéro quand l'ordre du premier d'entre eux s'élève de plus en plus. Donc, les seconds membres de (22) donneront, à la limite,

$$(26)\qquad \begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \sin x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. \end{cases}$$

On voit par là que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$, développées en séries convergentes procédant suivant les puissances entières et ascendantes de l'arc, contiennent, la première, tous les termes de degré pair et, la seconde, tous les termes de degré impair du développement analogue de l'exponentielle e^x, mais que ces termes y sont affectés alternativement des signes + et —. C'est ce qu'on aurait trouvé un peu plus directement en partant de la formule symbolique (21), qui implique les deux relations (22), et en y remplaçant, d'après la démonstration précédente, $\cos u$ par 1, $\sin u$ ou $\sin \frac{x}{m}$ par $\frac{x}{m}$. On aurait eu, à cause de $mu = x$,

$$(27)\qquad \cos x + \sqrt{-1}\sin x = \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{m}\right)^m.$$

Or, vu la formule (4) de la dernière Leçon [p. 42], cette expression de $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ se confond avec ce que devient le développement de e^x suivant les puissances croissantes de x quand on y substitue $x\sqrt{-1}$ à x et, par suite, quand on y sépare en deux séries distinctes les termes de degré pair et les termes de degré impair, en faisant alterner les signes + et — pour chaque catégorie de termes.

Les séries (26) sont respectivement, comme il le fallait, l'expression d'une fonction paire et d'une fonction impaire; de plus, chacune de ces deux séries a bien l'autre pour sa dérivée, au signe près quand il s'agit de la dérivée de $\cos x$ (¹).

(¹) L'analogie de la formule (27) avec la relation $e^x = \lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ invite à chercher si l'on arriverait à celle-ci par une voie analogue, en supposant, comme

22*. — Décomposition de $\cos x$ et de $\sin x$ en facteurs; formule de Wallis, etc.

Voyons maintenant ce que donnent les formules (23) lorsqu'on y fait de même $u = \frac{x}{2n}$ ou $u = \frac{x}{2n+1}$ et que n grandit indéfiniment. Comme ces formules (23), combinées avec les précédentes (22) devenues maintenant (26), ont été reconnues l'équivalent des identités (24), nous pouvons étudier celles-ci au lieu de (23) et y faire grandir n. Nous savons déjà que leurs premiers membres deviennent alors respectivement, à la limite, les deux séries (25), non seulement par leur valeur totale, mais même considérés terme à terme après avoir été ordonnés suivant les puissances ascendantes de x. Or, si, dans les seconds membres de (24), nous prenons d'abord les i premiers facteurs, en nombre indéfiniment croissant à mesure que n grandit, mais tous assez peu éloignés, relativement à l'ensemble des autres, pour que les sinus figurant à leurs dénominateurs soient très petits et puissent être remplacés par leurs arcs sans qu'il en résulte des erreurs sensibles dans le produit des i facteurs dont il s'agit, ces produits se-

---

point de départ, le nombre e choisi de manière que, pour $x = 0$, la dérivée de e^x se réduise à l'unité. C'est ce qu'on reconnaît de suite. Les formules (21) ou (22) étant remplacées, dans le cas de la fonction exponentielle, par la relation simple $e^{mu} = (e^u)^m$, on a, en posant $mu = x$, $e^x = (e^u)^m$. Or le rapport de l'accroissement, $e^u - 1$, qu'éprouve la fonction exponentielle quand sa variable va de zéro à u, à l'accroissement simultané très petit u de celle-ci, ne diffère de la dérivée admise, 1, de la fonction pour $u = 0$, que d'une très petite quantité ε. On a donc $e^u - 1 = u(1+\varepsilon)$, ou

$$e^u = 1 + u(1+\varepsilon) = 1 + \frac{x(1+\varepsilon)}{m},$$

expression très sensiblement réductible à la forme algébrique $1 + \frac{x}{m}$, comme l'était $\sin u$ à $\frac{x}{m}$. Il vient, par suite,

$$e^x = (e^u)^m = \left[1 + \frac{x(1+\varepsilon)}{m}\right]^m.$$

Posons $m = m_1(1+\varepsilon)$, et, en observant finalement que la formule (3) (p. 40) donne, à fort peu près, $\left(1 + \frac{x}{m_1}\right)^{m_1\varepsilon} = 1 + \varepsilon x$, c'est-à-dire 1 à la limite, nous aurons bien $e^x = \left(1 + \frac{x}{m_1}\right)^{m_1(1+\varepsilon)} = \left(1 + \frac{x}{m_1}\right)^{m_1}\left(1 + \frac{x}{m_1}\right)^{m_1\varepsilon} = \lim\left(1 + \frac{x}{m_1}\right)^{m_1}$ (pour m_1 infini).

ront respectivement

$$(28)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{4z}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z}{25\pi^2}\right)\cdots\left[1+\frac{4z}{(2i-1)^2\pi^2}\right] \\ \text{et} \\ \left(1+\frac{z}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{i^2\pi^2}\right). \end{cases}$$

Ordonnés suivant les puissances de z, ils ne donneront évidemment pas des développements ayant leurs coefficients aussi forts que ceux des séries (25); car, pour obtenir, à la limite $n=\infty$, ces coefficients des séries (25), il faudrait (comme on l'a vu à la fin du n° 20*, p. 21*) multiplier encore les expressions (28) développées, dont tous les termes et même toutes les parties de terme ont le signe +, par le produit des $n-i$ derniers facteurs des seconds membres de (24), produits affectés également dans toutes leurs parties du signe + : or l'effet de ces multiplications serait évidemment d'augmenter les coefficients des diverses puissances de z.

Mais il est aisé de reconnaître que les augmentations dont il s'agit là seraient trop faibles pour accroître dans un rapport appréciable aucun terme sensible de la série, c'est-à-dire aucun terme d'un rang *déterminé* (ne s'élevant pas sans limite à mesure que n grandit). En effet, supposons, pour fixer les idées, $z>0$, de manière que tous les $n-i$ facteurs en question non compris dans (28) soient supérieurs à l'unité; et considérons, par exemple, ceux de la seconde formule (24), ou de la *forme* $1+\frac{z}{(2n+1)^2\sin^2\frac{j\pi}{2n+1}}$. Le sinus qui y figure a avec son arc $\left(\text{toujours moindre que } \frac{\pi}{2}\right)$ un rapport supérieur à $\frac{2}{\pi}$, car le rapport d'un arc positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, à son sinus, croît avec cet arc [1] et atteint sa plus grande valeur, $\frac{\pi}{2}$, au moment où le sinus vaut 1. Si donc, dans le facteur binôme considéré $1+\frac{z}{(2n+1)^2\sin^2\frac{j\pi}{2n+1}}$,

[1] On le reconnaît en observant qu'un pareil rapport $\frac{x}{\sin x}$ a sa dérivée, $\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$, positive si son numérateur $\sin x - x\cos x$ l'est : or il l'est en effet, car il s'annule pour $x=0$ et grandit de $x=0$ à $x=\pi$, vu que sa propre dérivée se réduit à $x\sin x$ et est positive entre ces limites.

on remplace $\sin \frac{j\pi}{2n+1}$ par le produit de $\frac{2}{\pi}$ et de l'arc $\frac{j\pi}{2n+1}$, c'est-à-dire par $\frac{2j}{2n+1}$, le dénominateur deviendra plus petit et, par suite, le facteur binôme lui-même aura été augmenté. Ainsi, ce facteur se trouve compris entre 1 et $1+\frac{z}{4j^2}$. Or, en comparant cette limite supérieure $1+\frac{z}{4j^2}$ au développement de $e^{\frac{z}{4j^2}}$ par la formule (13) [p. 50] où l'on poserait $x=\frac{z}{4j^2}$, on voit qu'elle est moindre et que, par conséquent, le facteur binôme en question se trouve compris entre 1 et $e^{\frac{z}{4j^2}}$. Les $n-i$ facteurs très éloignés multipliés ensemble donneront donc un résultat compris lui-même entre l'unité et le produit des exponentielles de la forme $e^{\frac{z}{4j^2}}$, produit qui est une nouvelle exponentielle ayant pour exposant $\frac{z}{4}\left[\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(i+2)^2}+\dots\right]$. Or celle-ci, où i grandit indéfiniment avec n, tend vers zéro par suite de la convergence, reconnue plus haut (p. 9), de la somme des carrés des inverses des nombres entiers. Donc le produit de tous les facteurs binômes très éloignés dont il s'agit converge vers 1, puisqu'il est compris entre l'unité et un nombre dont le logarithme tend vers zéro. Et il en serait de même, dans le cas de la première formule (24), du produit des facteurs très éloignés, qui conduirait comme limite supérieure à une exponentielle où e aurait en exposant z multiplié par la somme des inverses des carrés impairs $(2i+1)^2$, $(2i+3)^2$, ..., somme évidemment inférieure à celle, déjà évanouissante, des inverses de $(2i+1)^2$, $(2i+2)^2$, $(2i+3)^2$, ...

Ainsi, tandis que les premiers membres des formules (24) tendent vers les expressions convergentes (25), les seconds membres deviennent les produits (28), où i grandit sans limite : et, de plus, la multiplication effective des facteurs (28) donne, à mesure qu'on en accroît le nombre, des polynômes ayant leurs coefficients de plus en plus voisins de ceux des expressions (25); car la multiplication ultérieure de ces polynômes par les $n-i$ facteurs plus complexes dont il vient d'être parlé ne pourrait, lorsque i a crû suffisamment, ajouter encore quelque chose de sensible au coefficient d'un terme de rang déterminé, terme ayant, par conséquent, une valeur assignable, sans augmenter sensiblement aussi cette valeur et, par suite, la valeur même du polynôme correspondant, ce qui est impossible d'après la démonstration précédente. Il n'y aura d'écart *relatif* notable que pour les

coefficients de termes très éloignés, d'un numéro d'ordre indéfiniment grandissant avec i; et, même pour ces coefficients, qui deviennent de plus en plus faibles, l'écart *absolu* tendra vers zéro, puisqu'ils y tendent eux-mêmes.

On peut donc remplacer, à la limite, les identités (24) par celles-ci très simples :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &1+\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2.3.4}+\ldots \\ &\quad=\left(1+\frac{4z}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z}{25\pi^2}\right)\cdots\left[1+\frac{4z}{(2i-1)^2\pi^2}\right]\cdots, \\ &1+\frac{z}{2.3}+\frac{z^2}{2.3.4.5}+\ldots \\ &\quad=\left(1+\frac{z}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{i^2\pi^2}\right)\cdots. \end{aligned}\right.$$

Rien n'empêche d'ailleurs d'y attribuer à z des valeurs négatives; ce qui, revenant à prendre les termes des séries avec des signes divers, mais les mêmes pour de mêmes puissances de z, accroît la convergence tant des premiers que des seconds membres (développés) de (29), sans altérer leur identité, à la limite.

Or il suffit d'y poser $z=-x^2$ pour que les premiers deviennent, l'un, l'expression (26) de $\cos x$, l'autre, multiplié par x, l'expression (26) de $\sin x$. Donc, en substituant à ces premiers membres, dans $\cos x$ et $\sin x$, les seconds, on aura les formules suivantes, qui donnent $\cos x$ et $\sin x$ *sous la forme de produits d'une infinité de facteurs :*

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \cos x &= \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{4x^2}{(2i-1)^2\pi^2}\right]\cdots, \\ \sin x &= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{i^2\pi^2}\right)\cdots. \end{aligned}\right.$$

Contentons-nous de tirer à présent deux conséquences des formules (29) et (30).

1° Identifions, dans les deux membres de chaque formule (29), le coefficient du terme du premier degré en z, coefficient qui est, pour les premiers membres, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$, tandis qu'il égale, par l'effectuation des produits indiqués aux seconds membres,

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\right).$$

Il viendra

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+\ldots+\dfrac{1}{(2i-1)^2}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{8}, \\ \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{i^2}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{6}. \end{cases}$$

Ainsi, la somme des inverses des carrés de tous les nombres impairs vaut le huitième du carré du rapport π de la circonférence au diamètre, et la somme des inverses des carrés de tous les nombres entiers à partir de 1 vaut le sixième de ce même carré de π. On en déduit que la première de ces sommes égale les $\frac{6}{8}$ ou les $\frac{3}{4}$ de la seconde : résultat qu'on aurait prévu aisément, car cette première somme, excédent de celle des inverses des carrés de tous les nombres entiers sur celle des inverses des carrés des nombres pairs, peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots\right),$$

ou bien, en mettant en évidence, dans tous les inverses des carrés des nombres pairs, le facteur commun $\frac{1}{4}$ et puis réduisant,

$$\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right).$$

2° Faisons, dans la seconde formule (30), $x=\frac{\pi}{2}$, $\sin x=1$. Si nous divisons alors les deux membres par $\frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$\frac{2}{\pi}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4i^2}\right)\cdots,$$

et, en décomposant chaque facteur binôme $1-\frac{1}{4i^2}$ en $\frac{2i-1}{2i}\,\frac{2i+1}{2i}$,

$$(32)\qquad \frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{7}{6}\cdots\frac{2i-1}{2i}\,\frac{2i+1}{2i}\cdots.$$

Nous retrouverons plus loin, dans le Calcul intégral, cette formule remarquable (due à Wallis), qui, renversée, donne $\frac{\pi}{2}$ comme produit d'une infinité de facteurs commensurables. Si, sous sa forme (32), on l'arrête à un facteur très éloigné $\frac{2i+1}{2i}$, puis qu'on divise son premier membre par $2i$ et son second membre par $2i+1$, mais en introduisant en outre dans le premier, pour le rendre rigoureusement égal au second, un facteur correctif, $(1-\varepsilon)^2$, d'autant plus voisin de 1 que i

sera plus grand, il viendra

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{\pi i} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2i-1}{2i}\right)^2,$$

et, en changeant les membres de place après extraction de leurs racines carrées,

$$(33) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2i-1}{2i} = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi i}};$$

ce qui indique, pour le produit $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2i-1}{2i}$, long à calculer quand i est très grand, la valeur simple, alors approchée (ou ne comportant qu'une fort petite erreur *relative*), $\frac{1}{\sqrt{\pi i}}$.

23*. — Des fonctions hyperboliques.

Nous avons vu les belles propriétés du cosinus et du sinus résulter en grande partie de ce fait, que chacun d'eux est la dérivée de l'autre par rapport à l'arc, sauf un changement de signe lorsqu'il s'agit de la dérivée du cosinus. Or il est clair que le même fait, sans ce changement de signe, se présentera, et devra entraîner des propriétés analogues, dans les deux fonctions qui auront les mêmes développements en série (26) que $\cos x$ et $\sin x$, mais avec leurs termes tous du même signe $+$. Ces deux fonctions s'appellent respectivement le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique* de l'*arc* x. Leurs expressions en série sont donc

$$(34) \qquad \begin{cases} \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ \sinh x = \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots. \end{cases}$$

Si l'on observe qu'elles contiennent, la première, tous les termes communs aux deux développements de e^x et de e^{-x}, la seconde, tous les termes de e^x qui acquièrent signe contraire dans e^{-x}, on pourra leur donner également les formes *finies*

$$(35) \qquad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Sous chacune des deux formes (34) et (35), on reconnaît aisément, en prenant leurs dérivées, que l'une quelconque de ces deux fonctions est bien la dérivée de l'autre.

Pour $x = 0$, leurs valeurs et leurs dérivées sont les mêmes que dans le cosinus et le sinus ordinaires. Mais, les termes de leurs développe-

ments (34) grandissant évidemment avec x en valeur absolue et ayant tous même signe, ces fonctions s'éloignent indéfiniment de zéro en même temps que x, tandis que, dans le sinus et le cosinus ordinaires, les changements de signe d'un terme à l'autre empêchent les séries de dépasser la valeur absolue 1 et rendent possible leur périodicité. Le cosinus hyperbolique, fonction paire, grandit de 1 à ∞ quand x va de zéro à $\pm\infty$, et le sinus, fonction impaire, grandit de $-\infty$ à zéro, puis de zéro à $+\infty$, quand x croît de $-\infty$ à zéro et de zéro à $+\infty$.

Voyons ce que deviendront dans ces fonctions les diverses propriétés des sinus et cosinus ordinaires. Et d'abord, si l'on désigne par u la variable, les carrés $\cosh^2 u$ et $\sinh^2 u$ auront tous les deux pour dérivée $2\cosh u \sinh u$, en sorte que leur différence sera invariable et égale à sa valeur pour $u = 0$ (alors que le cosinus vaut 1 et, le sinus, zéro). Ainsi, la relation (16) [p. 58] sera remplacée par celle-ci

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1, \tag{36}$$

qui montre que la différence entre le cosinus et le sinus, égale à 1 pour $u = 0$, s'atténue à mesure que u grandit; car ces deux fonctions croissent alors toutes les deux sans que l'écart existant entre leurs carrés augmente.

De même, quand la différence $u - v$ sera constante, les expressions $\cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v$ et $\sinh u \cosh v - \cosh u \sinh v$ auront leurs dérivées nulles et garderont constamment leurs valeurs relatives au cas où $v = 0$ et où u vaut la différence donnée $u - v$; de sorte que les formules (17) et (18) [pp. 7* et 8*] subsisteront, à part le changement de signe du dernier terme dans la première. Et, en mettant $-v$ au lieu de v, il viendra, pour tenir lieu des formules (19) [p. 8*],

$$\left\{\begin{aligned} \cosh(u+v) &= \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v, \\ \sinh(u+v) &= \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

On en déduirait des formules analogues à celles de la Trigonométrie pour $\cosh 2u$, $\sinh 2u$, $\cosh\frac{u}{2}$, $\sinh\frac{u}{2}$, ..., et même pour la tangente hyperbolique de la somme de deux arcs (rapport du sinus hyperbolique de cette somme à son cosinus hyperbolique, comme on verra bientôt).

Les propriétés (36) et (37) se vérifient d'ailleurs directement en substituant à $\cosh u$, $\sinh u$, $\cosh v$, $\sinh v$, et à $\cosh(u+v)$, $\sinh(u+v)$, leurs valeurs sous forme finie $\frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$, $\frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$, ... L'effectuation des multiplications indiquées montre aisément l'égalité des deux membres dans chaque formule.

Par suite, la relation symbolique (20) [p. 11*] deviendra beaucoup plus simple, vu qu'on n'aura pas à s'y préoccuper de changements de signe, et elle pourra s'écrire

$$(38)\quad \begin{cases} \cosh(u+v+\ldots)+\sinh(u+v+\ldots) \\ \qquad = (\cosh u+\sinh u)(\cosh v+\sinh v)\ldots, \end{cases}$$

où il suffira de grouper, dans le produit des facteurs du second membre, d'une part, les termes qui auront en facteur un nombre pair de sinus, pour en faire l'expression du cosinus hyperbolique de la somme $u+v+\ldots$, et, d'autre part, les termes affectés d'un nombre impair de facteurs sinus, pour en former l'expression du sinus hyperbolique de $u+v+\ldots$. En conséquence, les cosinus et les sinus des multiples d'un arc seront encore exprimés par les formules (22) [p. 11*], mais où tous les termes auront le signe $+$.

Enfin, les relations (29) [p. 27*], en y faisant $z=x^2$, donneront évidemment, si l'on multiplie la seconde par x,

$$(39)\quad \begin{cases} \cosh x = \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots\left[1+\frac{4x^2}{(2i^2-1)^2\pi^2}\right]\cdots, \\ \sinh x = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{i^2\pi^2}\right)\cdots. \end{cases}$$

Telles sont les expressions du cosinus et du sinus hyperboliques décomposés en une infinité de facteurs, tous du second degré et essentiellement positifs, à l'exception du premier x de la seconde fonction.

Par analogie avec la tangente ordinaire $\operatorname{tang} u = \frac{\sin u}{\cos u}$ et avec la cotangente ordinaire $\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$, on appelle *tangente hyperbolique* le rapport du sinus hyperbolique au cosinus hyperbolique et, cotangente hyperbolique, l'inverse. On a donc, notamment,

$$(40)\qquad \operatorname{tangh} u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}} = \frac{\frac{u}{1}+\frac{u^3}{1.2.3}+\ldots}{1+\frac{u^2}{1.2}+\ldots}.$$

La dérivée du quotient constituant le second membre est, d'après une règle du n° **11**, $\frac{\cosh^2 u-\sinh^2 u}{\cosh^2 u}$, c'est-à-dire, simplement, $\frac{1}{\cosh^2 u}$, si l'on tient compte de la relation (36). Ainsi, *une tangente hyperbolique a pour dérivée l'inverse du carré du cosinus correspondant*, tout comme une tangente ordinaire. Cette fonction, la même pour

$x = 0$ que la tangente ordinaire et ayant de plus à ce moment la même dérivée que celle-ci, varie donc, comme elle, dans le même sens que sa variable, puisque les dérivées de l'une et de l'autre tangente sont essentiellement positives. Mais, à l'inverse de ce qui arrivait pour la tangente ordinaire, qui prenait, de $u = -\frac{\pi}{2}$ à $u = \frac{\pi}{2}$, toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$, elle ne croît que depuis -1 jusqu'à $+1$ quand sa variable grandit de $-\infty$ à $+\infty$. On le voit le plus simplement possible en observant, d'une part, qu'elle est fonction impaire de u et, d'autre part, qu'on peut l'écrire $\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ ou bien, en multipliant par e^{-u} les deux termes de la fraction, $\frac{1 - e^{-2u}}{1 + e^{-2u}}$, expression qui se réduit à l'unité pour la valeur, $u = \infty$, annulant e^{-2u}.

On peut donc prévoir que le rapport de la tangente hyperbolique à l'arc, rapport égal à 1, d'après le dernier membre de (40), à la limite $u = 0$, décroîtra de 1 à zéro quand la valeur absolue de l'arc croîtra de zéro à l'infini. Et, en effet, si l'on prend la dérivée de ce rapport $\frac{\operatorname{tangh} u}{u}$, on trouve successivement, abstraction faite du dénominateur positif u^2,

$$\frac{u}{\cosh^2 u} - \operatorname{tangh} u = \frac{u - \sinh u \cosh u}{\cosh^2 u} = \frac{(2u) - \sinh(2u)}{2\cosh^2 u},$$

expression dont le signe est celui de l'excédent d'un arc $2u$ sur son sinus hyperbolique. Or la formule (34), en série, d'un sinus hyperbolique montre que le rapport du sinus à l'arc grandit avec la valeur absolue de celui-ci et dépasse l'unité dès que l'arc n'est plus nul. Donc l'expression $(2u) - \sinh(2u)$ est négative quand u est positif, et le rapport $\frac{\operatorname{tangh} u}{u}$, ayant alors sa dérivée négative, décroît à mesure que u grandit [1].

---

[1] Il en est autrement du rapport, $\frac{\operatorname{tang} u}{u}$, de la tangente ordinaire à l'arc; ce rapport grandit avec la valeur absolue de l'arc u, au moins tant que u n'atteint pas un quart, $\frac{\pi}{2}$, de circonférence. En effet, si l'on considère le rapport $\frac{\operatorname{tang} u}{u}$, égal encore à 1 pour u très petit, et qu'on en prenne la dérivée, celle-ci, abstraction faite du dénominateur u^2, est

$$\frac{u}{\cos^2 u} - \operatorname{tang} u = \frac{u - \sin u \cos u}{\cos^2 u} = \frac{(2u) - \sin(2u)}{\cos^2 u},$$

et elle se trouve positive, comme l'excès de l'arc $2u$ sur son sinus.

24*. — Des exponentielles imaginaires.

Les formules (29) [p. 27*] nous ont donné, d'une part, les deux fonctions $\cos x$ et $\frac{\sin x}{x}$, en y posant $z = -x^2$, d'autre part, les deux fonctions $\cosh x$ et $\frac{\sinh x}{x}$, en y posant $z = x^2$. On passe donc des fonctions hyperboliques cosinus et sinus, demi-somme et demi-différence de deux exponentielles comme e^x, e^{-x}, aux fonctions circulaires de mêmes noms, par un changement de signe du carré de la variable dans les séries (34) et (26) exprimant ces fonctions, c'est-à-dire par la substitution de $x\sqrt{-1}$ à x, d'après le sens expliqué plus haut (p. 10*) du symbole $\sqrt{-1}$.

Ainsi, l'introduction d'imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, à la place de x, dans les séries (13), (26), (34) exprimant e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\cosh x$, $\sinh x$, peut être utile, puisqu'elle ramène les fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques et, par suite, aux exponentielles. C'est pourquoi l'on a été conduit à appeler *exponentielle imaginaire*, et *cosinus, sinus, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique d'un arc imaginaire* $a + b\sqrt{-1}$, les expressions symboliques, de la forme $P + Q\sqrt{-1}$, produites par la substitution de $a + b\sqrt{-1}$ à x dans ces séries respectives.

Les deux parties réelles P, Q, qui y figurent, se trouvent, d'ailleurs, parfaitement déterminées. Soit, en effet, ρ le *module* de $a + b\sqrt{-1}$ (racine carrée positive de $a^2 + b^2$) et θ son *argument* $\left(\text{arc, compris entre } -\pi \text{ et } \pi, \text{ dont le cosinus vaut } \frac{a}{\rho} \text{ et le sinus } \frac{b}{\rho}\right)$; $a + b\sqrt{-1}$ ne sera autre que $\rho\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right)$ et sa puissance $n^{\text{ième}}$, en y appliquant la formule de Moivre, s'écrira $\rho^n\left(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta\right)$. Donc aucune des deux expressions réelles, $\rho^n \cos n\theta$ et $\rho^n \sin n\theta$, fournies par cette puissance, ne dépasse ρ^n en valeur absolue, et, par suite, les restes des séries considérées P, Q seront inférieurs à ceux des séries qu'on obtient en remplaçant x par ρ dans les proposées (13), (26), (34) dont on prendrait tous les termes positivement. Comme cette circonstance ne les empêche pas d'être convergentes, il en sera bien de même de P et Q.

Toutes les propriétés qu'expriment la relation fondamentale $e^u e^v = e^{u+v}$ et les formules (16), (19), (20), (22), etc., ou celles qu'on en déduit, s'étendent à ces expressions

Rappelons, pour le démontrer, en faisant d'abord abstraction des fonctions hyperboliques, combinaisons évidentes d'exponentielles, que les séries considérées (13) et (26) résultent des formules (4) [p. 12] et (27), où m est un exposant entier et positif que l'on prend de plus en plus grand. Autrement dit, les fonctions exponentielle, cosinus et sinus sont définies de la manière la plus générale par les formules

$$(41) \qquad e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m, \qquad \left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{m}\right)^m = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

qui font d'elles, en quelque sorte, des expressions algébriques entières, comportant le plus simplement possible l'introduction d'éléments de la forme $a + b\sqrt{-1}$, puisque ce n'est qu'à la fin des combinaisons ou calculs qu'on prendra $m = \infty$ dans les résultats. Cela posé, en multipliant par les règles de l'Algèbre e^u et e^v ainsi définis, il vient

$$(42) \quad \begin{cases} e^u e^v = \left(1 + \dfrac{u}{m}\right)^m \left(1 + \dfrac{v}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \dfrac{u}{m}\right)\left(1 + \dfrac{v}{m}\right)\right]^m \\ \qquad = \left(1 + \dfrac{u + v + \dfrac{uv}{m}}{m}\right)^m = e^{u+v+\frac{uv}{m}}, \end{cases}$$

où le dernier membre se réduira bien, évidemment, à e^{u+v} quand on rendra m infini. Ainsi la relation $e^u e^v = e^{u+v}$ est générale ; et il va sans dire qu'on en déduit de suite $e^u e^v e^w \ldots = e^{u+v+w+\cdots}$, $e^u e^{-u} = e^0 = 1$, $(e^u)^n = e^{nu}$ si n est entier, etc.

D'autre part, la seconde formule (41), dont le premier membre peut, vu la première (41), s'écrire $e^{x\sqrt{-1}}$, et où $\cos x$, $\sin x$ sont respectivement une fonction paire et une fonction impaire, équivaut aux deux suivantes,

$$(43) \qquad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \qquad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

qui, ajoutées ensemble ou retranchées l'une de l'autre, donnent

$$(44) \quad \cos x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right), \qquad \sqrt{-1}\sin x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right),$$

et permettent ainsi d'exprimer un cosinus ou un sinus au moyen de deux exponentielles. Or la formule générale $e^{u+v} = e^u e^v$, si l'on y remplace u, v par $\pm u\sqrt{-1}$, $\pm v\sqrt{-1}$, où u et v n'en restent pas moins quelconques, devient

$$e^{\pm(u+v)\sqrt{-1}} = e^{\pm u\sqrt{-1}} e^{\pm v\sqrt{-1}};$$

relations symboliques qu'on peut écrire, d'après (43),

$$(45)\quad \begin{cases} \cos(u+v)+\sqrt{-1}\sin(u+v) \\ \qquad = (\cos u+\sqrt{-1}\sin u)(\cos v+\sqrt{-1}\sin v), \\ \cos(u+v)-\sqrt{-1}\sin(u+v) \\ \qquad = (\cos u-\sqrt{-1}\sin u)(\cos v-\sqrt{-1}\sin v). \end{cases}$$

Et celles-ci, de la forme de (20) [p. 11*], donnent immédiatement les formules (19) [comprenant (16), (17) et (18), pp. 58, 7* et 8*] par leur demi-somme et leur demi-différence, après qu'on a effectué dans les seconds membres les multiplications indiquées. De $e^{u+v+w+\cdots} = e^u e^v e^w \cdots$ on passerait de même à la formule de Moivre (21), qu'il faudrait encore dédoubler en y mettant successivement $+u$ et $-u$ au lieu de u, afin que la demi-somme et la demi-différence des résultats conduisissent aux expressions (22) de $\cos mu$ et de $\sin mu$. Enfin les deux relations (29) [p. 27*], qui deviennent à la limite des identités, montreraient encore que les décompositions (30) de $\cos x$ et de $\sin x$ en facteurs sont valables pour des arcs imaginaires comme pour des arcs réels.

De ce que les formules (19) subsistent, on déduit que

$$\cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi = -\cos x,$$
$$\sin(x+\pi) = \sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi = -\sin x.$$

Ainsi, ajouter π à un arc imaginaire, c'est, comme pour un arc réel, faire changer simplement de signe son cosinus et son sinus. Et, par suite, ces fonctions redeviennent les mêmes quand l'arc croît de 2π : elles continuent à admettre la *période* 2π. D'autre part, si l'on considère l'exponentielle e^x, et qu'on ajoute $2\pi\sqrt{-1}$ à l'exposant, elle sera *multipliée par* $e^{2\pi\sqrt{-1}}$ *ou*, d'après (43), par $\cos 2\pi+\sqrt{-1}\sin 2\pi = 1$. Elle n'aura donc pas changé; et c'est ce que l'on exprime en disant qu'à la période *réelle*, 2π, des fonctions cosinus et sinus, il correspond la période *imaginaire* $2\pi\sqrt{-1}$ de la fonction exponentielle. Par conséquent, la fonction exponentielle est, elle aussi, *périodique*, à sa manière.

Toute expression de la forme $a+b\sqrt{-1}$ ou $\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, si l'on y substitue $e^{\log\rho}$ au module (toujours positif) ρ et, d'après (43), $e^{\theta\sqrt{-1}}$ à l'autre facteur $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$, devient l'exponentielle $e^{\log\rho+\theta\sqrt{-1}}$, et elle peut même, comme on vient de voir, s'écrire $e^{\log\rho+(\theta+2i\pi)\sqrt{-1}}$, i désignant un nombre entier quelconque ou $2i\pi\sqrt{-1}$ tout multiple de la période $2\pi\sqrt{-1}$. Il est naturel d'appeler *loga-*

rithmes de $a+b\sqrt{-1}$ les exposants $\log\rho+(\theta+2i\pi)\sqrt{-1}$, et, tout spécialement, le plus simple, $\log\rho+\theta\sqrt{-1}$, qui devient $\log\rho$ quand on a $b=0$, $a=\rho$ ou quand $a+b\sqrt{-1}$ se réduit à un nombre positif ρ. Pour un nombre négatif, on a $a=-\rho$, $b=0$, $\theta=\pi$: ainsi, *quand un nombre, de positif, devient négatif en conservant même valeur absolue, son logarithme s'accroît de la constante imaginaire* $\pi\sqrt{-1}$.

Il n'y a pas lieu d'insister ici beaucoup plus sur ces formules *symboliques*. Elles montrent, il est vrai, quel puissant instrument de généralisation et d'unification est le signe $\sqrt{-1}$, puisqu'il permet de rattacher les unes aux autres et de considérer à la fois plusieurs expressions qui, prises deux à deux, ont leurs termes pareils quant à la valeur absolue, mais tous positifs dans l'une, alternativement positifs et négatifs dans l'autre : avantage considérable, d'une part, en Algèbre, où l'on peut ainsi attribuer des racines même aux équations qui n'en ont pas (de réelles) et soumettre par là toutes les équations d'un même degré à des lois communes, d'autre part, dans l'étude des fonctions, où l'emploi du symbole $\sqrt{-1}$ réduit, comme on voit, les fonctions circulaires aux exponentielles et fait une seule famille de toutes les fonctions transcendantes usuelles. Mais, d'un autre côté, cette théorie ne comporte pas dans les transformations de formules, comme moyen continuel d'interprétation et de contrôle des calculs, l'usage de l'intuition ordinaire, ou vue directe et géométrique des choses, qui, dans l'étude de la quantité simple et surtout dans ses applications aux choses physiques, est si naturel à l'esprit et le garantit des erreurs tout en le reposant de l'aridité des raisonnements abstraits. Ce grave inconvénient est lié au pouvoir même qu'a la théorie en question de dépasser l'intuition ordinaire, en déduisant les unes des autres des courbes très disparates de formes, par exemple, en faisant résulter de l'addition des ordonnées, $y=\frac{1}{2}e^{x\sqrt{-1}}$, $y=\frac{1}{2}e^{-x\sqrt{-1}}$, de deux logarithmiques, les ordonnées $y=\cos x$ d'une sinusoïde [1]. Aussi évi-

(1) *Note sur la représentation géométrique et la théorie générale des quantités imaginaires ou complexes.*

On a essayé cependant, et non sans succès, en recourant à une certaine catégorie de figures planes, de donner un sens concret aux expressions imaginaires, de manière à permettre d'en suivre les transformations au moyen de constructions géométriques appropriées. Malheureusement, cette représentation des imaginaires ne peut pas avoir la simplicité de la ligne droite à extrémités, l'une fixe, l'autre mobile, qui figure toutes les quantités réelles entre $-\infty$ et ∞, et bien

terai-je autant que possible, dans toute la suite d'un Cours purement

---

peu des hommes de science voués aux applications ont le temps de se la rendre familière. Voici en quoi elle consiste.

Les éléments qu'on y combine, et dont chacun est censé exprimer une *quantité*, sont des angles, comme AOB, à côtés limités ayant entre eux un certain rapport $\frac{OB}{OA}$. D'ailleurs, la seule chose qu'on regarde dans un pareil assemblage de deux *rayons* OA, OB est sa *forme*, qui dépend : 1° de la grandeur ou ouverture de l'angle; 2° du rapport du second côté au premier. Une telle figure s'appelle une *biradiale :* sa forme étant seule à considérer, elle est censée rester la même soit quand on la déplace à volonté dans le plan, soit encore quand ses deux côtés OA, OB varient dans un même rapport quelconque. Mais on n'a pas le droit de la faire sortir du plan ni, par conséquent, de l'amener, au moyen d'une demi-rotation de son propre plan autour de OA, dans la position AOB′ symétrique de AOB : car AOB′ est une biradiale toute différente, dite *conjuguée* de la première, et dont l'angle AOB′, mesuré en tournant dans le sens de la flèche, vaut l'excédent de 4 droits sur AOB, ou simplement $-$AOB (par la soustraction de 4 droits qui ne change rien à la direction de OB′ par rapport à OA). Dans une généralisation, qui s'appelle *théorie des quaternions,* où les biradiales à combiner ont leurs plans de direction différente, celui de chacune peut bien se déplacer, mais rien que parallèlement à lui-même.

Fig. 1.

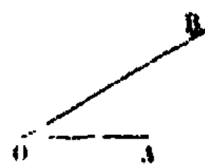
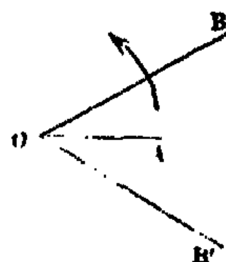


Fig. 2.

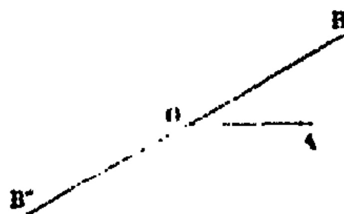


Telle est la *quantité complexe* propre, comme on va voir, à représenter une expression de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Sa *qualité* ou, en quelque sorte, son *espèce,* est réputée dépendre de l'angle AOB, tandis que sa *grandeur* est, *dans chaque espèce,* mesurée par le rapport $\frac{OB}{OA}$.

L'espèce la plus simple est celle où OA et OB sont en ligne droite. Alors la figure n'a qu'une dimension, et la quantité complexe devient une quantité simple, c'est-à-dire l'expression d'un nombre *réel* quelconque, positif ou négatif. On l'appelle une *biradiale numérique.* Le premier côté, OA, n'y figure que comme *mesure* des longueurs, indiquant, par sa grandeur, la valeur absolue de l'unité, et, par sa direction, le sens suivant lequel cette unité, portée sur OB à *partir de* l'origine O, se compte positivement, tandis qu'elle se compte négativement dans le sens contraire ou lorsque OB, au lieu d'être couché sur OA, est à l'opposé de OA.

Plus généralement, dans une biradiale quelconque AOB (*fig.* 3), si le point B se déplace suivant la direction OB ou suivant la direction BO, la grandeur de la biradiale change proportionnellement à OB; et quand le point B, reculant jusqu'au delà de l'*origine* O, vient sur le prolongement de BO, en B″, la qualité est réputée changer en ce sens seulement que la biradiale devient, de positive, négative, dans l'espèce à laquelle elle appartenait.

Fig. 3.



Deux biradiales, même d'espèces différentes, peuvent se combiner de deux ma-

préparatoire aux applications physiques, l'emploi des expressions imaginaires, dussé-je pour cela, une fois ou deux, allonger de quelques phrases les démonstrations.

La rapidité avec laquelle nous sommes parvenus aux expressions de $\cos mu$ et de $\sin mu$ montre cependant qu'il existe des cas où cet

---

nières fondamentales, pour fournir une troisième biradiale : ou bien, ces biradiales étant AOB, AOC (*fig.* 4), on fait coïncider leurs premiers côtés, OA, en remplaçant les seconds, OB, OC, par la diagonale OD du parallélogramme construit sur ces côtés, de manière à obtenir comme *résultat* de l'opération la biradiale AOD; ou bien, les deux biradiales étant (*fig.* 5) AOE, EOF, on fait coïncider

Fig. 4.

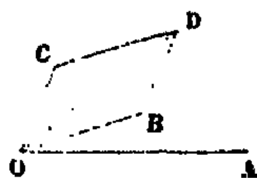
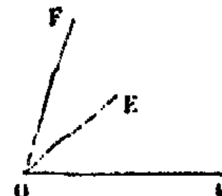


Fig. 5.



le premier côté, OE, de la seconde (grâce à une variation simultanée des deux côtés OE, OF dans un rapport convenable) avec le second côté, OE, de la première, ce qui donne la biradiale AOF. La première opération devenant une simple addition *algébrique* lorsque le parallélogramme s'aplatit infiniment, c'est-à-dire quand les deux biradiales AOB, AOC sont de la même espèce, il est naturel de l'appeler *addition* dans tous les cas. De même, la deuxième opération donnant, quand la biradiale EOF est numérique, une biradiale de même espèce que la première biradiale AOE et égale à celle-ci multipliée *algébriquement* par la grandeur $\frac{OF}{OE}$ de la seconde, on l'appellera *multiplication* dans tous les cas.

Cela posé, si l'on considère (*fig.* 6) la biradiale AOG *rectangle* (c'est-à-dire ayant son angle AOG droit) et que, après lui avoir donné une valeur égale à 1 ou avoir pris OG = OA, on la multiplie par elle-même en la transportant en GOG', le *carré* obtenu sera la biradiale numérique AOG', dont la valeur est -1. *La notion de biradiale permet donc d'étendre assez le sens de l'opération appelée* multiplication, *pour que le nombre* -1 *y admette une racine carrée parfaitement concrète ou susceptible d'être construite, qui est toute biradiale rectangle à côtés égaux :* mais cette racine se trouve *d'une autre espèce* que son carré -1, et voilà pourquoi on ne pouvait la rencontrer dans une série de quantités simples, ne différant les unes des autres qu'en plus ou en moins. La biradiale AOG aura donc pour expression analytique $\sqrt{-1}$, et, si, G se déplaçant perpendiculairement à OA, le rapport $\frac{OG}{OA}$ acquiert une valeur quelconque b, positive ou négative, cette biradiale, devenue b fois plus forte, s'écrira $b\sqrt{-1}$.

Fig. 6.



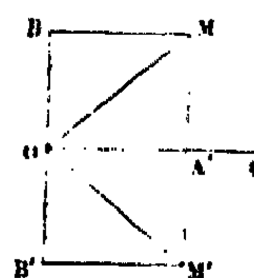
On conçoit maintenant que toute expression de la forme $a + b\sqrt{-1}$ soit repré-

emploi est à la fois sûr et trop précieux pour devoir être négligé. En voici deux exemples :

1° Multiplions par 2 les relations symboliques (44), puis élevons à

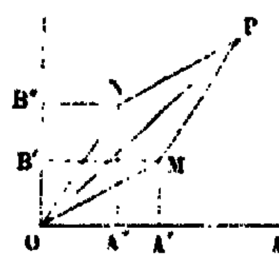
sentée par une biradiale. Si l'on prend, d'une part, une biradiale numérique AOA' où l'on ait $\frac{OA'}{OA} = a$, d'autre part, une biradiale rectangle AOB égale à $b\sqrt{-1}$, la *construction du parallélogramme* A'OBM *donnera, pour la* somme $a + b\sqrt{-1}$, la biradiale AOM, dont la grandeur $\frac{OM}{OA}$ *correspondra* [*vu la relation* $OM = \sqrt{(OA')^2 + (OB)^2}$] au *module* $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ de la quantité imaginaire, et dont l'angle AOM, *caractéristique de l'espèce de la biradiale*, ne sera autre que l'*argument* θ, car son cosinus $\frac{OA'}{OM} = \frac{a}{\rho}$, tandis que son sinus $\frac{OB}{OM} = \frac{b}{\rho}$. Et il est clair que la biradiale AOM', symétrique de AOM, mérite bien le nom, qu'on lui a donné, de *conjuguée* par rapport à AOM : en effet, les deux biradiales qui la composent, l'une, AOA', numérique, l'autre, AOB', rectangle, ont respectivement pour valeurs a et $-b\sqrt{-1}$, de sorte qu'elle représente l'expression $a - b\sqrt{-1}$, dite *conjuguée* de la précédente $a + b\sqrt{-1}$.

Fig. 7.



Il y a, enfin, parfaite concordance entre les opérations algébriques sur les imaginaires et les opérations géométriques de mêmes noms sur les biradiales. Car : 1° si, après avoir posé, pour fixer les idées, $OA = 1$, on ajoute deux biradiales, AOM, AON, ayant respectivement les expressions $OA' + OB'\sqrt{-1}$ et $OA'' + OB''\sqrt{-1}$, la diagonale OP, dans la biradiale somme AOP, aura, d'une part, pour projection sur OA, la somme, $OA' + OA''$, des projections des côtés OM et MP ou ON, d'autre part, pour projection sur la perpendiculaire OB' à OA, la somme analogue $OB' + OB''$; et cette biradiale AOP sera, ainsi, bien exprimée par $(OA' + OA'') + (OB' + OB'')\sqrt{-1}$, ou représentera *la somme algébrique des deux expressions* imaginaires proposées; 2° si l'on multiplie, d'après la règle donnée, deux biradiales AOB, BOC, représentant respectivement deux quantités imaginaires

Fig. 8.

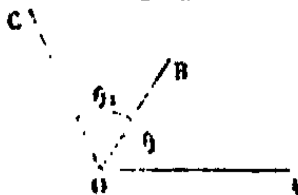


$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$$

et

$$\rho_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1) = \rho_1 e^{\theta_1\sqrt{-1}},$$

Fig. 9.



la biradiale produit AOC aura pour module $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OA} \times \frac{OC}{OB} = \rho\rho_1$ et pour argument $AOB + BOC = \theta + \theta_1$, exactement comme dans la multiplication algébrique, dont le résultat est

$$\rho\rho_1 e^{(\theta+\theta_1)\sqrt{-1}} = \rho\rho_1[\cos(\theta + \theta_1) + \sqrt{-1}\sin(\theta + \theta_1)].$$

la puissance $n^{\text{ième}}$ les deux membres de chacune, en développant les seconds membres des résultats par la formule du binôme et en y groupant ensemble les termes équidistants des extrêmes, qui ont, comme on sait, mêmes coefficients (du moins en valeur absolue). Il viendra

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} 2^n \cos^n x &= \left(e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}\right) \\ &\quad + \frac{n}{1}\left(e^{(n-2)x\sqrt{-1}} + e^{-(n-2)x\sqrt{-1}}\right) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(e^{(n-4)x\sqrt{-1}} + e^{-(n-4)x\sqrt{-1}}\right) + \ldots, \\ 2^n \left(\sqrt{-1}\right)^n \sin^n x &= \left(e^{nx\sqrt{-1}} \pm e^{-nx\sqrt{-1}}\right) \\ &\quad - \frac{n}{1}\left(e^{(n-2)x\sqrt{-1}} \pm e^{-(n-2)x\sqrt{-1}}\right) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(e^{(n-4)x\sqrt{-1}} \pm e^{-(n-4)x\sqrt{-1}}\right) - \ldots, \end{aligned}\right.$$

les signes supérieurs + correspondant, dans la seconde formule, au cas de n pair et les signes inférieurs — au cas de n impair. Or tous les binômes entre parenthèses, dans les seconds membres, sont de l'une ou de l'autre des deux formes $e^{u\sqrt{-1}} \pm e^{-u\sqrt{-1}}$, qui représentent respectivement $2\cos u$ et $2\sqrt{-1}\sin u$. Donc les deux formules (46) donneront les puissances $n^{\text{ièmes}}$ du cosinus et du sinus de l'arc x en fonction *linéaire* ou des cosinus, ou des sinus, de ses multiples nx, $(n-2)x$, $(n-4)x$, etc.

2° Soit à décomposer en ses facteurs réels les plus simples possibles l'expression $X^m \mp A^m$, ou (ce qui revient au même, comme on l'a vu en Algèbre) à résoudre l'*équation binôme* $X^m \mp A^m = 0$, A désignant un nombre positif. Et, d'abord, on prendra pour inconnue le rapport $\frac{X}{A} = x$, afin que l'équation devienne simplement $x^m = \pm 1$. Alors, en posant $x = e^{u\sqrt{-1}}$ et appelant θ l'arc, zéro ou π, qui donne

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \pm 1,$$

cette équation se trouvera réduite à $e^{mu\sqrt{-1}} = e^{\theta\sqrt{-1}}$: elle exprimera que les deux arcs mu et θ, ayant même cosinus et même sinus, ne peuvent différer que par un nombre entier, i, de circonférences 2π. On aura donc

$$mu = \theta + 2i\pi, \qquad u = \frac{\theta + 2i\pi}{m};$$

et les m racines de l'équation proposée $x^m \mp 1 = 0$ s'obtiendront en

donnant à i, dans la formule

$$x = e^{\frac{\theta+2i\pi}{m}\sqrt{-1}} = \cos\frac{\theta+2i\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta+2i\pi}{m},$$

les m valeurs consécutives 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$, pour lesquelles l'arc $\frac{\theta+2i\pi}{m}$ prend lui-même m valeurs équidistantes entre 0 et 2π. Il est clair, en effet, que ces m racines seront distinctes, tandis que l'addition ou la soustraction de m unités au nombre i redonnerait les mêmes. On pourrait encore ne considérer que des arcs compris entre $-\pi$ et π, en retranchant une circonférence à ceux des précédents qui excèdent π; et l'on verrait alors les racines imaginaires s'associer, comme il le faut, par groupes de deux conjuguées, correspondant aux arcs dont le signe seul différerait, de manière à donner, dans $x^m \mp 1$, des facteurs imaginaires du premier degré ayant pour produits respectifs les facteurs réels du second que l'on cherche.

Par exemple, si m est un nombre impair $2n+1$, et qu'on ait $\theta = 0$ ou que l'équation soit $x^{2n+1} - 1 = 0$, on prendra $i = 0$, $= \pm 1$, $= \pm 2$, ..., $= \pm n$: à part la racine $\cos 0 + \sqrt{-1}\sin 0$, ou 1, qui donnera, dans $x^{2n+1} - 1$, le facteur réel du premier degré $x - 1$, les autres seront, par groupes de deux conjuguées, de la forme

$$\cos\frac{2i\pi}{2n+1} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{2n+1},$$

et il y correspondra le facteur réel du second degré

$$\left(x - \cos\frac{2i\pi}{2n+1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{2n+1}\right)\left(x - \cos\frac{2i\pi}{2n+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{2n+1}\right)$$
$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{2i\pi}{2n+1} + 1\right).$$

En définitive, l'expression $x^{2n+1} - 1$, décomposée en facteurs réels du premier ou du second degré, deviendra

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} x^{2n+1} - 1 = (x-1)&\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{2n+1} + 1\right)\\ &\times\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{2n+1} + 1\right)\\ &\times\left(x^2 - 2x\cos\frac{6\pi}{2n+1} + 1\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\times\left(x^2 - 2x\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + 1\right).\end{aligned}\right.$$

On peut donc tirer des expressions imaginaires un grand parti, dans certaines questions difficiles, même quand on ne cherche que des relations entre quantités réelles. Il est clair, par exemple, que toute formule exprimant une propriété de fonctions exponentielles deviendra, à cause des relations (43), une certaine formule symbolique entre des cosinus et des sinus, si l'on y change les variables, x, u, v, ..., en $x\sqrt{-1}$, $u\sqrt{-1}$, $v\sqrt{-1}$, ... Supposé donc qu'on puisse ensuite, comme nous l'avons fait plusieurs fois, décomposer cette formule symbolique en formules ordinaires entre quantités, l'on se trouvera avoir, pour ainsi dire, *transposé* dans le monde géométrique des fonctions circulaires un fait d'Analyse démontré d'abord uniquement pour des exponentielles, et lui avoir donné de la sorte une forme toute nouvelle. C'est ainsi que les formules (45) nous ont permis de ne voir, dans les expressions classiques de $\cos(u+v)$ et de $\sin(u+v)$, qu'une application de la propriété fondamentale $e^{u+v} = e^u e^v$ des exponentielles. Or il est avantageux de pouvoir parfois opérer de tels rapprochements; car la fonction exponentielle, étant égale à sa dérivée, se manie avec beaucoup plus de facilité que les fonctions circulaires, et des relations très cachées où figurent celles-ci ont souvent comme une première forme simple, facile à saisir, entre exponentielles.

Voici un dernier exemple, dont nous pourrons nous servir plus tard, de ces sortes de *transpositions* (ou passages d'une forme réelle à une autre par le moyen d'une forme imaginaire), qu'il est bon de savoir opérer.

Soit l'expression, somme de deux exponentielles,

$$\tfrac{1}{2}(A+B)e^{(a+b)x} + \tfrac{1}{2}(A-B)e^{(a-b)x}.$$

Supposons qu'on y change b en $b\sqrt{-1}$ et B en $B\sqrt{-1}$. En mettant e^{ax} en facteur commun, elle deviendra

$$\tfrac{1}{2}e^{ax}\left[(A+B\sqrt{-1})e^{bx\sqrt{-1}} + (A-B\sqrt{-1})e^{-bx\sqrt{-1}}\right].$$

Substituons-y, d'après (43), $\cos bx \pm \sqrt{-1}\sin bx$ à $e^{\pm bx\sqrt{-1}}$ et groupons ensemble, d'une part, les coefficients de $\cos bx$, d'autre part, ceux de $\sin bx$. Il viendra simplement

$$e^{ax}(A\cos bx - B\sin bx).$$

Enfin, appelons C la racine carrée de la somme A^2+B^2 et c l'arc, compris entre $-\pi$ et π, qui a pour cosinus $\frac{A}{C}$ et pour sinus $\frac{B}{C}$: A et B

vaudront respectivement $C\cos c$, $C\sin c$, et l'expression considérée sera

$$Ce^{ax}(\cos c\cos bx - \sin c\sin bx) = Ce^{ax}\cos(bx + c).$$

On aura donc la formule

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A + B\sqrt{-1}}{2}e^{(a+b\sqrt{-1})x} + \frac{A - B\sqrt{-1}}{2}e^{(a-b\sqrt{-1})x} \\ &\qquad = e^{ax}(A\cos bx - B\sin bx) = Ce^{ax}\cos(bx + c). \end{aligned}\right.$$

COMPLÉMENT A LA CINQUIÈME LEÇON.

SUPÉRIORITÉ DE CERTAINES FONCTIONS IMPLICITES SUR LES FONCTIONS EXPLICITES, POUR EXPRIMER LES COURBES ET LES SURFACES. — PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DU PREMIER ORDRE DES FONCTIONS DE POINT.

10*. — Supériorité d'une certaine forme implicite de l'équation, sur sa forme explicite, pour exprimer une courbe plane; équation de la tangente : des points singuliers que présentent certaines courbes.

Insistons sur la simplicité relative de l'équation $F(x, y) = c$ définissant les fonctions algébriques implicites, équation où $F(x, y)$ est un polynôme, c'est-à-dire une fonction constamment bien déterminée, finie et continue de x et de y, ainsi que ses dérivées partielles, alors que les valeurs explicites $y = f(x)$ de ces fonctions contiennent, même dans les cas les plus abordables, des dénominateurs susceptibles de s'annuler ou de rendre la fonction infinie et des radicaux à significations multiples tantôt réels, tantôt imaginaires. On voit par là que le premier membre d'une équation de la forme $F(x, y) = c$ est une fonction des deux variables x et y susceptible de présenter une détermination et une continuité bien plus complètes que ne fait la fonction y de x ainsi donnée implicitement. Et l'on conçoit, en effet, que, dans un plan des xy, une fonction $F(x, y)$ puisse n'avoir en chaque point déterminé (x, y) qu'une seule valeur, partout finie, partout graduellement variable avec les coordonnées x, y, et que, cependant, l'ensemble des points où cette valeur égale la constante donnée c forme une courbe d'une grande complication, admettant des branches infinies, avec un nombre variable de valeurs de l'ordonnée y pour diverses abscisses x. Or il résulte de cette double hypothèse de parfaite détermination et de variation graduelle, impliquant la continuité de $F(x, y)$ et des deux dérivées partielles F'_x, F'_y en tous les points du plan, que *la courbe en question, définie par* $F(x, y) = c$, *n'a, en général, ni commencement, ni fin, ni angles, ni points de croisement, mais qu'elle se prolonge de part et d'autre de chacun de ses points suivant deux directions exactement opposées, sa tan-*

gente n'y tournant que d'une manière continue : propriété capitale, car elle fait de ce lieu géométrique, $F(x, y) = c$, quelque chose de complet ou comme un *tout naturel*, tandis que les diverses expressions correspondantes $f(x)$ de y n'en représentent que des parties, délimitées souvent d'une manière artificielle. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = c$ exprime immédiatement, en coordonnées rectangulaires, que les points (x, y) sont à la distance commune $\sqrt{c}$ du centre. Aussi définit-elle cette courbe *naturelle* qu'on appelle *une circonférence*, tandis que les deux fonctions obtenues en la résolvant, $y = \pm\sqrt{c - x^2}$, n'en donnent, prises à part, que des arcs, se terminant aux points où la dérivée y' devient infinie, c'est-à-dire à ceux où la tangente est parallèle à l'axe des y. On ne peut se dispenser d'associer ces deux fonctions, autrement dit, de remonter, par l'élimination du radical, à une équation ayant comme membres des expressions en x et y partout bien déterminées et graduellement variables, si l'on veut constituer en son entier la ligne naturelle correspondante.

Pour démontrer l'importante propriété énoncée ci-dessus, supposons d'abord que l'on marque sur le plan, afin de les éviter, les points que donne la résolution du système de deux équations à deux inconnues $F'_x(x, y) = 0$, $F'_y(x, y) = 0$, points, généralement en nombre restreint, et isolés les uns des autres, où s'annulent à la fois les deux dérivées partielles de la fonction F. En l'un quelconque d'entre eux, $F(x, y)$ prend une certaine valeur, et il faudrait que la constante c eût reçu précisément cette valeur pour que la courbe proposée y passât. Si donc on excepte quelques-unes des courbes en nombre illimité qu'exprime, suivant la valeur attribuée à la constante, l'équation $F(x, y) = c$, il n'arrivera, en aucun endroit des autres, que les deux dérivées $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ s'annulent à la fois.

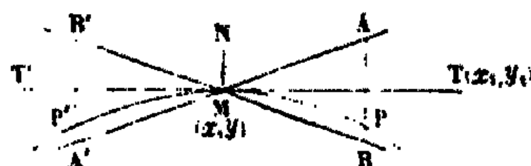
Cela posé, à partir d'un quelconque, $M(x, y)$ [p. 40*], de leurs points, imaginons que l'on se rende à un point voisin $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ du plan, en parcourant ainsi la droite de jonction de ces deux points, définie en direction par le rapport des deux accroissements correspondants Δy, Δx des coordonnées, et du même ordre, en grandeur, que le radical $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Le long de cette droite, la fonction F variera, d'après la formule (4) [p. 82], de la quantité

$$\Delta f = \left(\frac{df}{dx} + \varepsilon\right)\Delta x + \left(\frac{df}{dy} + \varepsilon_1\right)\Delta y$$

où ε et ε_1 s'évanouissent avec $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, quantité réductible, sauf

erreur relative insignifiante, à $\frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y$, tant que ne se neutraliseront pas sensiblement les deux termes principaux $\frac{df}{dx}\Delta x$, $\frac{df}{dy}\Delta y$, dont l'un au moins aura son coefficient F_x ou F'_y différent de zéro. Or cette neutralisation approchée n'a lieu que pour les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ définissant des directions très voisines de celle qu'exprime la valeur de y' donnée

Fig. 4.



par l'équation (11) [p. 91]. Si donc on mène par le point M la droite T'T qui a y' pour coefficient angulaire, et puis deux autres droites A'A, B'B faisant avec elle un certain angle très petit, d'autant plus voisin de zéro que les points $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ s'éloigneront moins de M, on pourra prendre simplement $\Delta F = \frac{dF}{dx}\Delta x + \frac{dF}{dy}\Delta y$ pour tous ceux qui seront extérieurs aux deux angles AMB, A'MB'. Ainsi ΔF y change simplement de signe avec Δx et Δy, ou en deux points symétriquement placés par rapport à M ; et la fonction continue $F(x, y)$, égale à c en M, est, par exemple, plus grande que c dans tout l'espace B'MA, moindre que c dans tout l'espace opposé A'MB. C'est dire que, tout près de M, le long de chemins comme BA, A'B' perpendiculaires à T'T, elle passe une fois au moins par la valeur c, en un certain point P ou P'. Mais elle n'y passe qu'une fois ; car, pour de mêmes valeurs de Δx et de Δy, celles de Δf restent sensiblement pareilles quand on part de divers points (x, y) peu distants les uns des autres, vu que les facteurs $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ sont des fonctions continues ; et, par suite, la fonction F varie très sensiblement le long de BA comme le long de la normale MN à TT', c'est-à-dire en grandissant toujours ou sans passer deux fois par la même valeur. Donc il y a, sur chaque droite comme BA ou comme A'B', un point du *lieu* $F(x, y) = c$, et un seul ; ce qui montre bien que ce lieu comprend, de part et d'autre de son point quelconque M, une *file unique* de points. De plus, les deux angles TMB, T'MA' tendant vers zéro avec MB et MA', les deux cordes MP, MP' prolongées ont pour positions limites MT et MT' ; ce qui signifie que cette file continue de points *affecte* partout *une certaine direction,* ou

est une *courbe*. Et c'est même une courbe sans jarrets, dont la tangente ne tourne, d'un point (x, y) à un autre, que d'une manière graduelle. Effectivement, trois points très voisins, P, M, P', y sont toujours presque en ligne droite.

Imaginons que le point $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ soit pris, comme $M(x, y)$, sur la courbe $F(x, y) = c$, en P par exemple. Alors $\Delta F = 0$, et les deux termes principaux $\frac{dF}{dx}\Delta x$, $\frac{dF}{dy}\Delta y$ tendent à se neutraliser, quand le radical $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ décroît : autrement dit, leur somme est nulle en comparaison de ce radical dès que Δx, Δy sont des différentielles dx, dy, et il en résulte, pour déterminer le rapport mutuel de celles-ci,

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0. \tag{13}$$

Or alors la droite de jonction, MP, des deux points (x, y), $(x + dx, y + dy)$, se réduit, dans la limite que l'on a en vue, à un simple *élément* rectiligne, indicateur de la direction d'une sécante devenue la tangente MT. Si l'on appelle (x_1, y_1) les coordonnées d'un point T mobile sur celle-ci (coordonnées dites *courantes*), comme, d'après une propriété caractéristique de la ligne droite, leurs accroissements $x_1 - x$, $y_1 - y$ éprouvés de M en T seront proportionnels à MT et garderont entre eux leur rapport *initial*, relatif à ce premier instant où l'on avait $x_1 - x = dx$ et $y_1 - y = dy$, on pourra, dans (13), remplacer dx, dy par $x_1 - x$, $y_1 - y$. Il viendra, entre x_1 et y_1, la relation

$$\frac{dF}{dx}(x_1 - x) + \frac{dF}{dy}(y_1 - y) = 0. \tag{14}$$

C'est donc l'équation de la tangente. Effectivement, résolue par rapport à $y_1 - y$, avec substitution de y', d'après (11), au quotient de $-\frac{dF}{dx}$ par $\frac{dF}{dy}$, elle donne

$$y_1 - y = y'(x_1 - x), \tag{15}$$

équation de la droite passant par le point (x, y) et ayant le coefficient angulaire y' : or cette droite est bien la tangente issue du point de contact (x, y), comme on l'a vu au n° 9 (p. 31). Mais la forme (14) vaut, à plusieurs égards, mieux que celle-ci (15), plus simple il est vrai : d'une part, les coefficients de $x_1 - x$ et de $y_1 - y$ n'y deviennent jamais infinis en un point déterminé (x, y); d'autre part, elle est symétrique en x et en y, et n'implique, pas plus que l'équation correspondante $F(x, y) = c$, le choix d'une variable indépendante spéciale. La for-

mule (15), au contraire, suppose, comme l'équation $y = f(x)$ de la courbe, le choix de x comme variable indépendante. Or il n'y a pas, en thèse générale, de raison pour préférer x à y, ou pour exprimer la courbe par la fonction $y = f(x)$ plutôt que par la fonction inverse $x = \varphi(y)$.

Nous avons fait, dans ce qui précède, abstraction des points du plan où les deux dérivées $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ s'annulent à la fois : une étude ultérieure montrera que la courbe $F(x, y) = c$, menée en un de ces points (x, y), peut ne pas s'y prolonger de part et d'autre suivant deux directions opposées, ou, encore, qu'elle peut y admettre plusieurs branches, tantôt croisées, tantôt soudées ou raccordées ensemble. Dans ces divers cas, le point (x, y) est dit *singulier*, non seulement pour le distinguer des autres points, soit ordinaires, soit exceptionnels (*sommets*, *points d'inflexion*, etc.), de la courbe qui le contient, mais surtout parce que sa présence sur une courbe suffit pour la rendre elle-même, comme on a vu, exceptionnelle et singulière parmi toutes celles qu'exprime une même équation $F(x, y) = c$.

12*. — Supériorité d'une forme implicite de l'équation d'une surface sur sa forme explicite; des points singuliers de certaines surfaces.

Pareillement à ce que nous avons démontré pour une courbe plane, la forme explicite de l'équation d'une surface est rarement la meilleure. Toutes les fois que, en chassant, par exemple, des dénominateurs et éliminant des radicaux, dût-on, pour cela, associer à la fonction proposée $z = f(x, y)$ d'autres fonctions analogues, on pourra échanger une équation explicite qui admet pour z ou ses dérivées des valeurs infinies, contre une autre implicite, de la forme $F(x, y, z) = c$, dont le premier membre soit une fonction F des trois variables x, y, z bien déterminée, finie et continue en tous les points (x, y, z) de l'espace situés à des distances finies de l'origine, cette forme implicite sera bien préférable. Et la raison en est encore que, sauf pour quelques-unes, en nombre restreint, des surfaces représentées par l'équation $F(x, y, z) = c$, *le lieu des points* $F(x, y, z) = c$ *s'étendra, tout autour de chacun d'eux, sous la forme non plus d'une simple droite, mais d'un plan, jusqu'à des distances infiniment petites, sans s'arrêter, par conséquent, à aucune limite, ni présenter nulle part aucun croisement ou aucune soudure de nappes multiples de surface, non plus qu'aucune arête ou aucun autre changement brusque de la direction du plan tangent, mais de manière à former un tout continu et naturel.*

Pour le démontrer, reconnaissons d'abord que, si l'on s'éloigne d'un point donné quelconque $M(x, y, z)$ du lieu $F(x, y, z) = c$, le long de lignes qui y soient tracées, tous les points ainsi atteints, infiniment voisins du premier (x, y, z), se trouveront, par rapport à celui-ci, dans des directions comprises à l'intérieur d'un même plan. En effet, d'une part, x, y, z, pour l'une quelconque de ces lignes, seront, comme précédemment (p. 94), trois fonctions d'une même variable t, liées ici par la relation $F(x, y, z) =$ la constante c; de sorte que la différentielle en t de la fonction composée $F(x, y, z)$, s'annulant, permettra d'écrire

$$(18) \qquad \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0,$$

avec une erreur absolue de la forme $\varepsilon\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ et, par conséquent, négligeable dans (18) *pourvu que les trois dérivées* $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ *ne soient pas nulles simultanément au point* (x, y, z). D'autre part, en appelant encore x_1, y_1, z_1 les coordonnées courantes de la droite qui joint le point $M(x, y, z)$ au point voisin $(x + dx, y + dy, z + dz)$ de la ligne en question tracée sur le lieu $F(x, y, z) = c$, les trois différences $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ seront proportionnelles à dx, dy, dz. Ainsi, la relation (18) deviendra

$$(19) \qquad \frac{dF}{dx}(x_1 - x) + \frac{dF}{dy}(y_1 - y) + \frac{dF}{dz}(z_1 - z) = 0;$$

et celle-ci, étant du premier degré en x_1, y_1, z_1, représentera bien un plan, savoir le plan tangent cherché, lieu de toutes les cordes infiniment petites prolongées, ou tangentes à la figure, issues de (x, y, z). C'est évidemment le plan exprimé sous une autre forme par l'équation (17) [p. 95] aux points où les dérivées partielles p et q de z en x et y sont finies et déterminées; d'où il suit que, en résolvant (19) par rapport à $z_1 - z$, les valeurs de $z_1 - z$ obtenues égaleront constamment celles que donne (17), et, cela, soit quand l'une des deux quantités $x_1 - x$, $y_1 - y$ s'annulera, l'autre étant quelconque, soit pour des valeurs arbitraires de $x_1 - x$ et de $y_1 - y$. Il en résulte l'égalité de p, q aux deux quotients respectifs de $-\frac{dF}{dx}$, $-\frac{dF}{dy}$ par $\frac{dF}{dz}$, circonstance qui sera directement reconnue dans une prochaine Leçon.

Cherchons maintenant comment varie la fonction $F(x, y, z)$ dans tout l'espace voisin du point considéré M. A cet effet, concevons que, le plan tangent en M étant tracé, on lui mène par ce point M une per-

pendiculaire, dite la ***normale*** à la surface $F(x, y, z) = c$, et que l'on tire encore, à partir de M, une infinité de droites formant avec la normale un angle constant presque droit, ou avec le plan tangent un certain angle très petit, qui pourra être d'autant plus voisin de zéro qu'on devra moins s'éloigner de M dans l'espace. Ces droites et leurs prolongements dessineront évidemment une surface conique, comprenant deux cônes circulaires très ouverts, opposés par leur sommet M et ayant pour axe la normale. Cela posé, si l'on passe du point (x, y, z) à tout autre point voisin $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ de l'espace, en suivant une droite dont les coordonnées seront trois fonctions d'une même variable t, la fonction $F(x, y, z)$ croîtra, d'après (4) [p. 82], de la quantité

$$(20)\qquad \Delta F = \left(\frac{dF}{dx} + \varepsilon\right)\Delta x + \left(\frac{dF}{dy} + \varepsilon_1\right)\Delta y + \left(\frac{dF}{dz} + \varepsilon_2\right)\Delta z.$$

Or celle-ci est sensiblement réductible à la somme des trois termes $\frac{dF}{dx}\Delta x$, $\frac{dF}{dy}\Delta y$, $\frac{dF}{dz}\Delta z$, sauf dans le cas où ces termes principaux se neutralisent à fort peu près; ce qui, évidemment, n'a lieu que pour les directions faisant de très petits angles avec le plan tangent (19) et, à la limite, situées dans ce plan, d'après la manière même dont son équation a été obtenue. C'est dire que, pour les droites *assez courtes* issues de M et comprises à l'intérieur des deux cônes très ouverts dont il vient d'être parlé, l'expression de Δf peut être réduite à

$$\frac{dF}{dx}\Delta x + \frac{dF}{dy}\Delta y + \frac{dF}{dz}\Delta z,$$

et change simplement de signe avec Δx, Δy, Δz, savoir, quand on passe d'un cône à l'autre. Ainsi, la fonction *continue* $F(x, y, z)$ est plus grande que c dans l'un d'eux, plus petite que c dans l'autre; d'où il suit qu'elle atteint à un certain moment la valeur c le long de toute petite droite normale au plan tangent et joignant les deux nappes de la surface conique. Elle n'égale d'ailleurs c qu'en un seul point de chacune de ces petites droites; car, le long de celles-ci, Δx, Δy, Δz passent par les mêmes valeurs que le long de la normale issue de M, et ΔF y varie de même, vu que les dérivées continues $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ sont peu différentes pour tous les points considérés. La surface possède donc en M une nappe et une seule, qui s'étend tout autour dans la direction du plan tangent, en ne s'en écartant que d'une manière graduelle.

Observons enfin qu'il a été fait abstraction, dans ce qui précède, des points (x, y, z) de l'espace où se vérifient à la fois les trois équa-

tions à trois inconnues $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, $\frac{dF}{dz}=0$. Ces points sont généralement en nombre limité, et la fonction $F(x, y, z)$ n'y prend, par conséquent, que certaines valeurs. Seules, les quelques surfaces $F(x, y, z)=c$ correspondant à ces valeurs y passeront. La démonstration précédente ne s'appliquant plus à ces points, les surfaces dont il s'agit pourront, dans une étendue infiniment petite tout autour, ne plus ressembler à un simple plan, comme le montrera une discussion ultérieure. Alors on appellera de tels points, de même que leurs pareils dans les courbes planes, des points *singuliers*.

43*. — Différentiation d'une fonction de point le long d'un chemin donné.

Notre étude précédente sur les courbes planes et sur les surfaces nous a conduit à considérer, soit dans un plan, soit dans l'espace, des fonctions de point $F(x, y)$ ou $F(x, y, z)$; et nous avons vu comment elles deviennent des fonctions composées d'une seule variable indépendante, quand on traite de leurs valeurs le long de lignes quelconques, où les coordonnées x et y, x, y et z sont des fonctions arbitraires d'une variable auxiliaire t. On rend plus précis le sens de ces fonctions composées en choisissant pour la variable t, comme il a été indiqué au n° 15 (p. 45), l'arc même s de la ligne décrite, compté à partir d'un point déterminé de celle-ci. Alors la dérivée de la fonction F, pour un point donné (x, y) ou (x, y, z), représente le quotient, par un arc élémentaire ds commençant à ce point, de l'accroissement dF qu'éprouve la fonction depuis cette première extrémité de l'arc ds jusqu'à la seconde $(x+dx, y+dy)$ ou $(x+dx, y+dy, z+dz)$. On peut, d'ailleurs, d'après un théorème de la première Leçon (p. 16), remplacer ds par la corde ou *élément rectiligne* qui joint le point (x, y) ou (x, y, z) à ce second point $(x+dx, y+dy)$ ou $(x+dx, y+dy, z+dz)$: aussi le rapport $\frac{dF}{ds}$ est-il appelé la *dérivée* de la fonction *suivant l'élément rectiligne ds*.

Imaginons, pour plus de simplicité, qu'on rapporte le plan ou l'espace à un système d'axes coordonnés rectangulaires, de manière que les accroissements dx, dy, dz soient les trois projections, sur ces axes, de la corde ou de l'arc ds, et égalent les produits respectifs de ds par les cosinus (dits *cosinus directeurs*) des angles sous lesquels se font ces projections, ou qui sont ceux de l'élément rectiligne ds, tangent à la courbe parcourue, avec les trois directions des x, y et z positifs. J'appellerai a et b, ou a, b et c, ces cosinus directeurs $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, ou

$\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$. Les dérivées de x et de y, ou de x, y et z, seront donc respectivement a et b, ou a, b, c; et la dérivée considérée de F aura, d'après (6) [p. 82], l'expression suivante

$$(21) \qquad \frac{dF}{ds} = \begin{cases} \text{soit} \quad a\frac{dF}{dx} + b\frac{dF}{dy}, \\ \text{soit} \quad a\frac{dF}{dx} + b\frac{dF}{dy} + c\frac{dF}{dz}, \end{cases}$$

les cosinus a et b, ou a, b et c, vérifiant d'ailleurs, à cause de $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ou de $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, la relation $a^2 + b^2 = 1$ ou $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

44*. — Paramètre différentiel du premier ordre d'une fonction de point.

Cela posé, bornons-nous d'abord au cas de deux variables x, y, et donnons successivement à l'élément ds, tracé sur le plan, toutes les orientations possibles autour de (x, y), en lui supposant, en premier lieu, la direction des x positifs, puis le faisant tourner, autour de son extrémité fixe (x, y), dans le sens qui va des x positifs vers les y positifs, et, chaque fois, d'une même fraction infiniment petite d'angle droit. Nous pourrons nous proposer de chercher la moyenne arithmétique des valeurs que recevra, suivant toutes ces directions, soit la dérivée $\frac{dF}{ds}$, soit son carré. Dans le second membre de la première relation (21), ou dans son carré développé, les seules quantités variables avec la direction seront les coefficients a, b, a^2, b^2, ab; en sorte que, si m désigne le nombre très grand (infini même à la limite) des directions considérées, les sommes des valeurs de $\frac{dF}{ds}$ ou de $\frac{dF^2}{ds^2}$, divisées par leur nombre, s'obtiendront en ajoutant les produits respectifs soit de $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$, soit de $\frac{dF^2}{dx^2}$, $\frac{dF^2}{dy^2}$, $2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}$, par les $m^{\text{ièmes}}$ parties des sommes des valeurs de a, b, ou de a^2, b^2, ab. Autrement dit, supposé que l'on appelle moy a, moy b, moy a^2, ... la valeur moyenne de a, de b, de a^2, ..., il viendra

$$(22) \qquad \begin{cases} \text{moy}\,\frac{dF}{ds} = (\text{moy}\,a)\frac{dF}{dx} + (\text{moy}\,b)\frac{dF}{dy}, \\ \text{moy}\,\frac{dF^2}{ds^2} = (\text{moy}\,a^2)\frac{dF^2}{dx^2} + (\text{moy}\,b^2)\frac{dF^2}{dy^2} + 2(\text{moy}\,ab)\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}. \end{cases}$$

Or la moyenne des valeurs ou de a, ou de b, ou du produit ab est

nulle : car, d'une part, à deux directions opposées de l'élément ds il correspond des valeurs égales et contraires de a et b; d'autre part, à une même valeur soit de a, soit de b, il correspond deux directions, symétriques par rapport à une parallèle à l'axe ou des x ou des y, pour lesquelles les deux valeurs, soit de b, soit de a et, par suite, de ab, ont même grandeur absolue avec signes contraires. Et quant aux valeurs moyennes des carrés a^2, b^2, elles sont égales, vu qu'il y a, par rapport à chacun des deux axes coordonnés, un même nombre d'éléments ds disposés pareillement un à un, et que, par suite, les valeurs de b forment, rangées convenablement, la même série de quantités que les valeurs de a. Mais, a^2+b^2 valant 1, la somme totale des carrés de ces deux séries de m quantités égale m, et il vient, en divisant cette somme totale par m, $\text{moy}\,a^2+\text{moy}\,b^2=1$. Les deux moyennes égales $\text{moy}\,a^2$, $\text{moy}\,b^2$ ont donc pour valeur commune $\frac{1}{2}$. Ainsi les formules (22) deviennent simplement

$$(23)\qquad \text{moy}\,\frac{dF}{ds}=0,\qquad \text{moy}\,\frac{dF^2}{ds^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}\right).$$

La première n'offre pas d'intérêt; mais la seconde, en observant qu'une quelconque des directions considérées pourrait être prise pour celle des x et une des deux directions perpendiculaires pour celle des y, montre que *le carré de la dérivée de la fonction, en un point donné* (x, y), *a pour moyenne de ses valeurs, relatives à toutes les directions possibles autour de ce point, la demi-somme de ses deux valeurs se rapportant à deux directions rectangulaires quelconques.* En un point déterminé du plan, l'expression positive $\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}$ acquiert donc la même valeur $\sqrt{2\,\text{moy}\,\frac{dF^2}{ds^2}}$, quel que soit le système adopté de coordonnées rectangles x et y. Lamé lui a donné le nom de *paramètre différentiel du premier ordre* de la fonction de point et l'a désignée, pour abréger, par le symbole Δ_1, mis devant la lettre F exprimant la fonction. Ainsi l'on a, par définition,

$$(24)\qquad \Delta_1 F=\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}.$$

Passons maintenant au cas de trois variables x, y, z. Il n'est plus alors possible de répartir *également*, tout autour du point (x, y, z), un nombre considérable mais limité d'éléments rectilignes ds, ayant leur orientation définie par les trois cosinus directeurs a, b, c; car, dans une étendue à trois dimensions, l'espace angulaire environnant un point ne se laisse pas diviser en un nombre arbitraire de parties

superposables, à la manière d'un simple angle plan. Néanmoins, quand les éléments rectilignes ds dirigés de divers côtés deviennent tellement nombreux qu'un cône circulaire de très petit angle, ayant son sommet en (x, y, z) et son axe mobile librement tout autour, ne cesse jamais d'en contenir une multitude, leur répartition peut approcher de plus en plus de l'uniformité. Pour le reconnaître, imaginons, en vue de fixer les idées, qu'on décrive, autour de (x, y, z) comme centre, la sphère de rayon 1, et que chaque élément rectiligne ds qu'on veut construire soit représenté par le point où son prolongement perce la sphère. Nous aurons à prouver qu'une surface applicable sur celle-ci et très petite en tous sens, sensiblement plane par conséquent, mais d'ailleurs de forme quelconque, pourra contenir toujours, sauf erreur relative nulle à la limite, le même nombre de ces points, de quelque manière qu'on la fasse glisser sur la sphère.

Traçons sur celle-ci, autour des deux extrémités d'un diamètre quelconque comme pôles, une infinité de cercles parallèles, dont l'espacement mutuel soit une très petite corde constante ε d'un des méridiens menés d'un pôle à l'autre. Puis divisons chaque cercle parallèle en parties égales, ayant (du moins sur les cercles d'un rayon beaucoup plus grand que ε) un rapport sensiblement égal à 1 avec une même ligne infiniment petite, ε par exemple. Les points de division obtenus formeront ainsi des files circulaires, et, dans toute étendue superficielle très petite en tous sens, prise à une distance finie des pôles, ces files, sensiblement rectilignes, parallèles et équidistantes, contiendront des nombres de points à fort peu près proportionnels à leur longueur et très considérables. Or il suit évidemment de là que deux de ces étendues sensiblement planes, de même forme, de mêmes dimensions et orientées de même par rapport à la direction des files, contiendront à leur intérieur des nombres relativement presque égaux de points; car l'une et l'autre intercepteront à fort peu près, aux mêmes hauteurs au-dessus ou au-dessous de leur centre ou de tout autre de leurs points homologues, d'égales longueurs de files dont le nombre total sera aussi sensiblement le même. Si donc, après avoir fait tendre ε vers zéro, on imagine tracées sur la sphère, en un même endroit assez distant des pôles, deux petites figures sensiblement planes, l'une de forme quelconque, l'autre circulaire, rattachées ensemble par un double réseau de fils très nombreux équidistants, se croisant à angle droit ou divisant les deux figures en une multitude de carrés égaux pareillement orientés, puis qu'on déplace et fasse tourner arbitrairement sur la sphère l'ensemble des deux figures et du réseau, sans trop l'approcher d'aucun pôle, les carrés égaux ne cesseront pas, dans chaque position,

d'être orientés tous de même et de contenir, par suite, des nombres à fort peu près pareils de points; de sorte que, abstraction faite des *mailles* ou carrés du réseau, en nombre relativement insignifiant, coupés par le contour des deux figures et par conséquent incomplets, le rapport des deux nombres de points compris dans la figure non circulaire et dans la figure circulaire égalera toujours le rapport des nombres invariables de carrés complets contenus dans chacune d'elles. Et comme il est évident que les changements d'orientation sont sans influence sur le nombre des points qu'entoure la figure circulaire, il s'ensuit qu'ils le seront aussi sur le nombre de ceux que comprend l'autre figure de forme quelconque. D'ailleurs, ce raisonnement, appliqué en particulier à chaque maille, que l'on comparerait à un cercle de grandeur proportionnée en l'y reliant par un nouveau réseau de carrés beaucoup plus petits, prouve même que des mailles égales du réseau contiennent toutes un pareil nombre de points où qu'on les transporte séparément sur la sphère, pourvu que ce ne soit pas à des distances d'un pôle seulement comparables à leur côté. Par suite, revenant à la petite figure proposée, si on la décompose par un réseau à mailles assez serrées en un nombre de plus en plus grand de carrés, puis qu'on la fasse glisser n'importe où sur la sphère, fût-ce près d'un pôle et sur le pôle même, toutes les mailles du réseau ne cesseront pas d'y comprendre les mêmes nombres de points qu'ailleurs, à l'exception peut-être des plus voisines du pôle, en nombre non moins négligeable (relativement) que celui des mailles ébréchées par le contour; et, en conséquence, la petite figure ne cessera pas, même dans ces positions exceptées jusqu'ici, de contenir toujours, à des écarts relatifs près infiniment petits, le même nombre de points. Ceux-ci pourront donc bien être dits *uniformément distribués;* et les éléments ds, issus du centre (x, y, z), dont les prolongements y aboutissent, se trouveront indifféremment répartis vers toutes les régions de l'espace, c'est-à-dire sans être, en moyenne, plus rapprochés dans une direction que dans une autre.

Les mêmes conséquences, évidemment, subsisteront, et la distribution restera *uniforme,* si l'on imprime aux divers points des déplacements infiniment petits quelconques.

Enfin, remarquons que ce ne seront pas seulement, sur la sphère, deux petites figures égales, mais aussi deux figures symétriques, servant de base à deux angles au centre analogues ou à deux *pyramides* très aiguës symétriques elles-mêmes, qui comprendront constamment les mêmes nombres de points et intercepteront les mêmes nombres d'éléments rectilignes ds : car de doubles systèmes de fils réduiront ces figures à deux assemblages symétriques de carrés tous égaux.

Il y aura donc lieu, dans le cas de trois coordonnées x, y, z comme dans celui de deux, de prendre les valeurs moyennes de la dérivée $\frac{dF}{ds}$ et de son carré, pour une infinité d'éléments rectilignes ds uniformément répartis tout autour du point (x, y, z). Et ces moyennes se composeront, d'après la seconde formule (21), des produits respectifs de $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$, ou de $\frac{dF^2}{dx^2}$, $\frac{dF^2}{dy^2}$, $\frac{dF^2}{dz^2}$, $2\frac{dF}{dy}\frac{dF}{dz}$, $2\frac{dF}{dz}\frac{dF}{dx}$, $2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}$, par les valeurs moyennes de a, b et c, ou de a^2, b^2, c^2, bc, ca, ab. Or, à mesure que a, b, c deviennent plus nombreux, ou à mesure que l'on considère des directions plus voisines les unes des autres, les nombres de celles-ci contenues, par exemple, dans deux pyramides très aiguës ayant leur sommet en (x, y, z) et symétriques soit par rapport à leur sommet, soit par rapport à l'un des plans coordonnés, approchent de plus en plus, comme on a vu, de l'égalité, en ce sens que leur rapport tend vers la valeur 1. Les cosinus a, b, c changeant simplement de signe quand on passe d'une direction à son opposée, il y aura donc sensiblement, pour a, b, c, des valeurs négatives aussi nombreuses et aussi fortes que les valeurs positives; d'où il suit que les moyennes de a, b, c deviendront, à la limite, infiniment petites en comparaison de la valeur individuelle la plus grande, 1, de ces cosinus. Pareillement, deux de ceux-ci a, b, c étant un à un égaux et de même signe, mais le troisième, égal et de signe contraire, pour deux directions symétriques par rapport à un des plans coordonnées, il y aura, très sensiblement, autant et d'aussi forts produits bc, ca, ab négatifs, que de positifs; et la moyenne de chacun de ces trois produits bc, ca, ab sera encore nulle à la limite. Enfin, si, après avoir décomposé l'espace d'une certaine manière, autour du point (x, y, z), en pyramides très aiguës, ayant leurs sommets en ce point, et avoir noté les éléments ds placés dans chacune, on fait tourner le réseau, supposé indéformable, de ces pyramides (sans déplacer les éléments rectilignes ds), de manière que celle d'entre elles qui contenait l'axe des x vienne s'orienter de la même manière le long de l'axe des y, chaque pyramide dans sa nouvelle position comprendra sensiblement, d'après ce qui a été démontré, le même nombre d'éléments rectilignes que dans la première. Or la valeur du cosinus b, pour ces nouveaux éléments, sera évidemment celle du cosinus a pour les premiers; d'où il suit que la différence entre les carrés a^2 et les carrés b^2 sera constamment infiniment petite, si l'on groupe convenablement les valeurs de a et celles de b, en exceptant peut-être un nombre d'entre elles relativement insignifiant. Cela revient évidemment à dire que la différence entre les valeurs

moyennes de a^2 et de b^2, ou, pour la même raison, de c^2, tend vers zéro à mesure que les éléments ds deviennent plus nombreux. Or, la somme des trois carrés a^2, b^2, c^2 valant 1 pour chaque direction, il est clair que la somme de leurs moyennes égalera aussi l'unité; ce qui exige que ces trois moyennes, d'ailleurs équivalentes finalement, tendent vers la limite $\frac{1}{3}$. La deuxième formule (21) et son carré donneront donc, en définitive,

$$(25) \qquad \text{moy}\,\frac{dF}{ds} = 0, \qquad \text{moy}\,\frac{dF^2}{ds^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2}\right).$$

La seconde de celles-ci exprime que *le carré moyen de la dérivée de la fonction* $F(x, y, z)$, *au point* (x, y, z), *suivant toutes les directions de l'espace, est la moyenne arithmétique des carrés des trois dérivées de la fonction suivant les directions rectangulaires (quelconques) des axes coordonnés choisis.* Le radical, pris positivement,

$$\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2}},$$

reçoit donc, en chaque point (x, y, z) de l'espace, la même valeur $\sqrt{3\,\text{moy}\,\frac{dF^2}{ds^2}}$, quel que soit le système des axes adoptés. C'est surtout dans ce cas de trois coordonnées, plutôt que dans celui de deux seulement examiné tout à l'heure, que Lamé l'a considéré, et lui a donné le nom de *paramètre différentiel du premier ordre de la fonction*, en le désignant par le symbole Δ_1 placé devant le nom de la fonction. On écrira donc

$$(26) \qquad \Delta_1 F = \sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2}},$$

définition qui se réduit à la précédente (24) quand on suppose F indépendant de z.

43*. — Signification géométrique du paramètre différentiel du premier ordre; cosinus directeurs des normales à une famille de surfaces.

Représentons-nous l'ensemble des points où la fonction continue $F(x, y, z)$ a une même valeur c : ils sont caractérisés par l'équation $F(x, y, z) = c$, qui, définissant z comme fonction implicite de x et de y, exprime une certaine surface. En donnant ensuite à c un accroissement très faible dc, on obtiendra un lieu de points voisins des premiers, c'est-à-dire une nouvelle surface, qui, sur une étendue finie, se

trouvera d'un certain côté de la première si l'on a pris dc positif, du côté opposé si l'on a pris dc négatif; et ainsi de suite. L'équation $F(x, y, z) =$ une constante c représente donc ce qu'on peut appeler une *famille de surfaces*. Leurs plans tangents, définis par l'équation (19) [p. 49*], auront d'ailleurs des directions peu différentes en des points (x, y, z) voisins; de sorte que l'espace sera découpé par ces surfaces en tranches très minces, à bases sensiblement planes et parallèles sur de petites étendues.

Cela posé, si, partant d'un point quelconque (x, y, z) de l'une de ces surfaces, on s'en éloigne le long de la *normale*, ou perpendiculaire au plan tangent mené en ce point (x, y, z), jusqu'à la rencontre d'une surface infiniment voisine, puis qu'on se rende de même de celle-ci à la suivante, et ainsi de suite, sans jamais cesser de traverser à angle droit toutes les surfaces que l'on rencontre, les chemins suivis de la sorte, et qui seront des lignes courbes (puisque leur direction changera insensiblement), constitueront ce qu'on appelle les *trajectoires orthogonales* aux surfaces proposées. Or cherchons la dérivée de la fonction $F(x, y, z)$, au point (x, y, z), le long de celle de ces lignes qui y passe, supposée parcourue en allant du côté où $F(x, y, z)$ grandit; et appelons, pour fixer les idées, dn, et non ds, son élément issu de (x, y, z), afin d'indiquer par la lettre n qu'il est *normal* à la surface $F = c$. Comme l'expression (26) reste la même, au point considéré, quelle que soit l'orientation des axes coordonnés rectangulaires, évaluons-l'y en prenant un axe des x positifs parallèle à l'élément dn et de même sens. Les deux axes des y et des z seront, par suite, parallèles au plan tangent mené en (x, y, z) à la surface $F = c$ qui y passe, et les deux éléments rectilignes dy, dz, tirés à partir de (x, y, z) dans les sens de ces axes, appartiendront au plan ou se trouveront parmi ceux qui, rasant la surface, donnent $dF = 0$. Ainsi, sous le radical (26), les deux derniers termes seront nuls. Quant au premier, dx n'y sera autre chose que l'élément rectiligne considéré dn normal au plan tangent, et, par suite, dF y désignera la différentielle correspondante de F, positive par hypothèse. Le radical de (26) se réduira donc à $\frac{dF}{dn}$, et l'on aura

$$\Delta_1 F = \frac{dF}{dn}. \tag{27}$$

Par conséquent, *le paramètre différentiel du premier ordre d'une fonction de point égale la dérivée de cette fonction le long de la trajectoire orthogonale aux lieux des points pour lesquels la fonction est constante.*

Remarquons d'ailleurs que la direction du chemin suivi dn, normal en $M(x, y, z)$ à la surface $F(x, y, z) = c$ menée par ce point, se détermine aisément, ou que les trois angles α, β, γ qu'elle fait avec les parties positives de trois axes rectangulaires quelconques des x, y, z ont leurs cosinus donnés par des formules très simples.

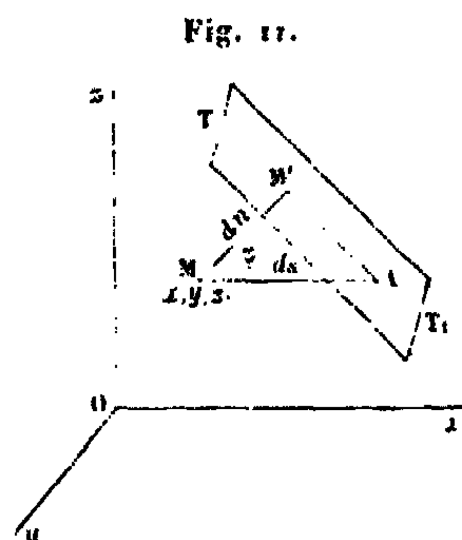


Fig. 11.

En effet, ce chemin infiniment petit $dn = MM'$, sensiblement perpendiculaire à la surface TT_1 lieu des points où la fonction $F(x, y, z)$ prend la même valeur $F + dF$ qu'en M', est évidemment la projection, sur MM', de tous les éléments rectilignes, $ds = MA$, émanés de M en faisant avec MM' des angles aigus φ, et qui vont aboutir à la surface TT_1, à fort peu près plane dans le voisinage de M'. On a donc $dn = ds \cos\varphi$; et $\Delta_1 F$, ou $\frac{dF}{dn}$, vaut $\frac{dF}{ds\cos\varphi}$, c'est-à-dire le produit de $\frac{1}{\cos\varphi}$ par la dérivée $\frac{dF}{ds}$ de la fonction F dans le sens de ds, puisque le numérateur dF est autant l'accroissement de cette fonction le long de ds que le long de dn. Or l'égalité $\Delta_1 F = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dF}{ds}$ donne

$$(28) \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{ds}.$$

Et cette formule continue à subsister quand l'angle φ devient obtus, ou quand ce n'est plus l'élément ds, mais un autre de direction opposée, qui rencontre, en un point A, la surface TT_1; car l'élément proposé ds peut alors être regardé comme faisant suite à ce second élément rectiligne MA censé parcouru dans un sens inverse ou en rétrogradant de A vers M, de sorte qu'il suffit, pour passer d'un cas à l'autre, de remplacer MA par AM, c'est-à-dire, dans (28) où $\Delta_1 F$ sera finalement le même en A qu'en M, dF par $-dF$ et $\cos\varphi$ par $-\cos\varphi$, changements qui se neutralisent.

Les trois *cosinus directeurs* cherchés $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, valeurs de $\cos\varphi$ pour trois éléments $ds = dx$, $ds = dy$, $ds = dz$ ayant respectivement les sens des x, y, z positifs, seront donc, d'après (28),

$$(29) \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dx}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dy}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dz}.$$

Les mêmes propriétés et formules (27), (28), (29) s'appliquent sans difficulté au cas de deux seules coordonnées x, y, sauf à y remplacer les surfaces $F(x, y, z) = c$ par les courbes $F(x, y) = c$ du plan des xy, courbes qui ont évidemment, dans le plan, leurs *trajectoires normales* ou *orthogonales*, et à substituer, par suite, aux plans tangents, les simples tangentes que définit l'équation (14) [p. 47*], en faisant d'ailleurs abstraction, dans les relations (29), du troisième cosinus directeur $\cos\gamma$, rendu nul par la supposition $\frac{dF}{dz} = 0$.

46*. — Pente d'une surface; notion des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente.

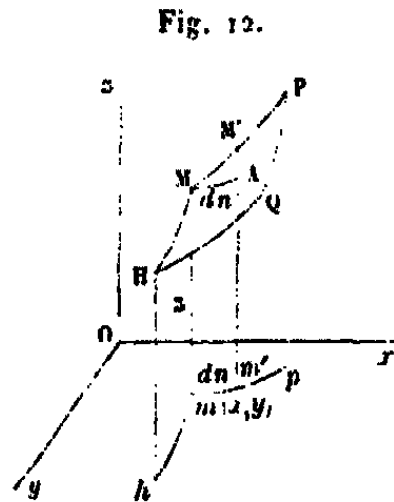
Mais, dans ce cas de deux coordonnées x, y, on peut donner une interprétation purement géométrique de la formule (27), devenue alors, par une élévation au carré,

$$\frac{dF^2}{dn^2} = \frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2}. \tag{30}$$

Menons, en effet, par chaque point, $m(x, y)$ [p. 61*], du plan des xy supposé horizontal, une ordonnée verticale, mM ou z, égale à la fonction $F(x, y)$, et considérons la surface $z = F(x, y)$, ou MQ, lieu des extrémités M de toutes les ordonnées pareilles. Les lignes $F(x, y) = c$ du plan des xy constituent évidemment les projections horizontales des lignes, MH par exemple, de la surface, qui ont toutes leurs ordonnées z égales à une même valeur c, ou dont tous les points se trouvent à une distance constante c du plan horizontal des xy : on appelle ces dernières, comme MH, les *lignes de niveau* de la surface. Il est clair qu'elles sont, élément par élément, parallèles et égales à leurs projections $F(x, y) = c$, telles que mh. Quant aux trajectoires orthogonales, mp par exemple, dont dn désigne un élément, elles sont aussi les projections horizontales d'une seconde famille de lignes de la surface, savoir, de celles, comme MP, qui, ayant leurs éléments successifs dans des plans, mMM', menés perpendiculairement aux lignes de niveau MH, ne peuvent manquer elles-mêmes de couper à angle droit ces lignes de niveau, et constituent, par conséquent, sur la surface autant qu'en projection horizontale, leurs trajectoires orthogonales. Ces trajectoires orthogonales, comme MP, aux lignes de niveau de la surface, s'appellent ses *lignes de plus grande pente* ou, simplement, ses *lignes de pente*, pour des raisons qu'on verra bientôt.

Cela posé, l'un quelconque, MM', de leurs éléments, a évidemment, pour sa projection *mm'* sur le plan des xy, l'élément correspondant dn d'une trajectoire orthogonale, *mp*, aux courbes $F(x, y) = c$ de ce plan, et il a pour projection verticale la *différence de niveau* AM' ou dz de ses deux extrémités, différence qui est l'accroissement dF éprouvé par l'ordonnée verticale $F(x, y)$ de la surface le long de cet élément rectiligne dn. Or le rapport $\frac{dF}{dn}$ ou $\frac{dz}{dn}$ de la différence de niveau en question AM', au chemin correspondant $dn =$ MA parcouru dans le sens horizontal, représente évidemment la tangente trigonométrique de l'angle AMM' que fait avec l'horizontale dn, ou avec le plan des xy, la direction en (x, y, z) de la ligne de plus grande pente MP : il est, par définition, la *pente* ou la *déclivité* de cette ligne. Et il mesure aussi la pente analogue de la surface : car la ligne de niveau MH menée en (x, y, z), intersection mutuelle de la surface QMH et du plan horizontal AMH, constitue, sur une longueur infiniment petite, l'arête de l'angle dièdre formé par le plan tangent en M et par ce plan horizontal ; d'où il suit que l'angle de l'élément MM' de la ligne de plus grande pente avec sa projection horizontale MA sur la face AMH est l'angle plan de ce dièdre, et que, par suite, sa tangente trigonométrique $\frac{dz}{dn}$ exprime indifféremment la pente du plan tangent ou de la surface et celle de la ligne de plus grande pente : ce qui justifie le nom de *ligne de pente de la surface* donné à celle-ci.

Fig. 12.



Quant aux dérivées partielles $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ ou $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, obtenues en ne faisant pas varier soit y, soit x, elles représentent les pentes analogues constatées sur la surface, au point (x, y, z), lorsqu'on y marche à partir de ce point dans des plans parallèles à celui des zx ou à celui des zy. Ces pentes sont, par conséquent, celles des deux éléments rectilignes suivant lesquels la surface est coupée, en M, par deux plans verticaux parallèles aux deux axes rectangulaires, mais d'une orientation horizontale d'ailleurs quelconque, des x et des y.

Ainsi, la formule (30) exprime que, *si l'on considère, en un point d'une surface donné à volonté, les pentes des deux coupes ou sec-*

tions faites dans cette surface par deux plans verticaux rectangulaires quelconques s'y croisant, la racine carrée de la somme de leurs carrés, paramètre différentiel du premier ordre de l'ordonnée, est constante et égale à la pente de la surface.

Il suit de là que nul élément rectiligne, tracé sur la surface au point considéré (x, y, z) et toujours tangent en ce point à une certaine coupe verticale, ne peut, à moins d'être perpendiculaire à la ligne de niveau (ou de déclivité nulle) et de se confondre ainsi avec l'élément de la ligne de pente, avoir une déclivité aussi forte que celle, $\frac{dz}{dn}$, de la surface même ou de cet élément de la ligne de pente; et c'est pourquoi celle-ci mérite, en tous ses points, son nom de *ligne de plus grande pente* de la surface.

COMPLÉMENT A LA SIXIÈME LEÇON.

COURBURE DES COURBES PLANES ET PARAMÈTRE DIFFÉRENTIEL DU SECOND ORDRE DES FONCTIONS DE POINT; CHANGEMENTS DE VARIABLES.

51*. — Importance particulière et signification de la dérivée seconde.

Si nous considérons spécialement la dérivée seconde $f''(x)$, elle égale la limite du rapport $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$. Or, comme on vient de le voir [p. 100], $\Delta^2 f(x)$ est l'accroissement, $f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$, de la différence première $\Delta f(x)$, ou $f(x+\Delta x) - f(x)$, quand x y grandit de Δx. On a donc

$$(7)\qquad \Delta^2 f(x) = 2\left[\frac{f(x+2\Delta x)+f(x)}{2} - f(x+\Delta x)\right];$$

et $f''(x)$ est la limite de l'expression

$$\frac{2}{(\Delta x)^2}\left[\frac{f(x+2\Delta x)+f(x)}{2} - f(x+\Delta x)\right],$$

où ne figurent, avec la valeur *actuelle* $f(x)$ de la fonction, que des valeurs $f(x+\Delta x)$, $f(x+2\Delta x)$, *ultérieures* ou correspondant à des valeurs plus grandes de la variable. Mais, en vertu de la loi de variation graduelle, cette expression, nouvelle fonction de x, ne change que dans un rapport négligeable (à la limite) quand x y varie d'une quantité de l'ordre de Δx seulement. On a donc le droit d'y retrancher de x une petite constante, Δx, choisie de manière à y faire paraître autant de valeurs de la fonction venant *avant* $f(x)$ que de valeurs *ultérieures* : ce qui offrira l'avantage d'introduire une plus grande symétrie [sans compter celui d'une convergence beaucoup plus rapide vers $f''(x)$, comme on verra au n° 96*]. Et l'on aura, de la sorte, pour la quantité dont $f''(x)$ est la limite,

$$\frac{2}{(\Delta x)^2}\left[\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)}{2} - f(x)\right].$$

De même, le rapport $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, qui tend vers $f'(x)$, y tendra encore (et beaucoup plus vite d'après ce qui sera démontré dans ce n° 96*), si l'on retranche de x la moitié de l'intervalle total Δx des valeurs de la variable qui y figurent; ce qui le change en

$$\frac{f(x+\frac{1}{2}\Delta x)-f(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}.$$

Désignons par $2h$, dans ce rapport, par h, dans l'expression précédente, la différence Δx; et il viendra, en supposant h infiniment petit,

$$(8)\qquad \begin{cases} f''(x) = \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} - f(x)\right], \\ f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \end{cases}$$

Or $f(x+h)$ et $f(x-h)$ sont les valeurs de la fonction aux deux instants où sa variable présente l'écart h de part et d'autre de sa valeur actuelle x; en sorte que leur demi-somme peut être appelée la *valeur moyenne de la fonction à la distance h de sa valeur actuelle* et, l'excédent de cette demi-somme sur $f(x)$, l'*accroissement moyen* correspondant de la fonction. Désignons-le par $\varphi(h)$, et observons de plus que son expression $\frac{1}{2}[f(x+h)+f(x-h)]-f(x)$, différentiée en y faisant varier h d'une fraction infiniment petite de sa valeur, donne

$$\varphi'(h)=\tfrac{1}{2}[f'(x+h)-f'(x-h)], \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi'(h)}{h}=\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h},$$

rapport exprimant la dérivée $f''(x)$, d'après la seconde formule (8) supposée appliquée à $f'(x)$ et non plus à $f(x)$. Il vient donc tout à la fois, quand h est une variable infiniment petite,

$$(9)\qquad f''(x)=\frac{2}{h^2}\varphi(h)=\frac{\varphi'(h)}{h}=\frac{1}{2h}\left[\frac{df(x+h)}{dh}+\frac{df(x-h)}{dh}\right].$$

En d'autres termes, *la dérivée seconde d'une fonction est le produit de l'accroissement moyen qu'éprouve cette fonction de part et d'autre de sa valeur actuelle à une distance infiniment petite h, multiplié par le facteur* $\frac{2}{h^2}$; *et elle est aussi le rapport, à h, de la dérivée de ce même accroissement moyen lorsque h varie d'une fraction infiniment petite de sa valeur, dérivée égalant la moyenne de celles, par rapport à h, de la fonction donnée, pour les deux valeurs* $x \pm h$ *de la variable.*

La dérivée seconde doit à ces propriétés, qui en font comme la *mesure de la rapidité d'accroissement moyen de la fonction aux environs de la valeur considérée*, d'être, à certains égards, la dérivée *la plus naturelle* et de jouer un rôle capital dans les applications de l'Analyse.

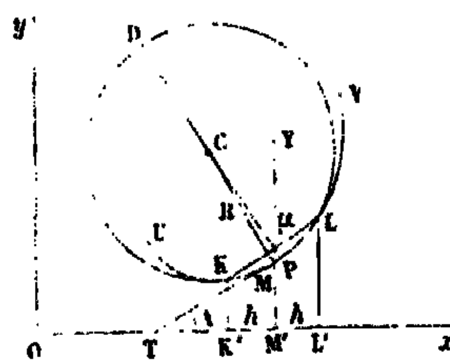
32*. — Courbure d'une courbe plane.

En voici une interprétation géométrique très importante. Construisons (*fig.* 13) la courbe UMV qui, rapportée à un système d'axes rectilignes Ox, Oy, représente la fonction $y = f(x)$; et soient KK', MM', LL' ses trois ordonnées infiniment voisines et équidistantes $f(x-h)$, $f(x)$, $f(x+h)$. La demi-somme des deux extrêmes se trouvera exprimée par l'ordonnée μM' du milieu μ de la corde KL; de sorte qu'on aura $\varphi(h) = \pm\,\mu M$, le signe $+$ correspondant au cas où le milieu μ de la corde KL est, par rapport au point M de l'arc, du côté des y positifs, ou sur la droite MY parallèle à Oy et de même sens, et le signe $-$ au cas où μ est, par rapport à M, du côté des y négatifs, sur le prolongement de YM. On aura donc, d'après le second membre de (9),

$$(10) \qquad y'' \quad \text{ou} \quad f''(x) = \frac{\pm 2(\mu M)}{(M'L')^2}.$$

Or, *supposant maintenant les axes rectangulaires*, faisons passer, par les trois points K, M, L de la courbe, une circonférence DKPL, dont R désignera le rayon. A la limite, cette circonférence possède, en M, même tangente que la courbe $y = f(x)$, puisque la direction limite de la corde commune ML (ou KM) est la même dans les deux. J'appellerai A l'angle aigu MTM' de cette tangente MT à la courbe UV avec l'axe des abscisses. Menons, dans la circonférence ainsi obtenue, le diamètre PD qui coupe à angle droit, en μ, la corde KL. Son segment μP forme avec l'ordonnée μM' et avec une corde infiniment petite MP, qu'on peut regarder comme étant sur l'alignement de la tangente MT, un triangle dont l'angle en P a son sinus infiniment peu différent de 1. La proportion des sinus $\frac{\mu M}{\mu P} = \frac{\sin P}{\sin \mu MP}$ y donne donc, sauf erreur relative négligeable, $\mu M = \frac{\mu P}{\sin \mu MP}$, relation

Fig. 13.



évidemment équivalente à $\mu M = \frac{\mu P}{\sin TMM'} = \frac{\mu P}{\cos A}$. D'autre part, la projection M'L', effectuée sous l'angle A, de la demi-corde μL, égale $(\mu L)\cos A$.

Le second membre de (10), par la substitution à μM et à M'L' de ces valeurs, devient $= \frac{2(\mu P)}{(\mu L)^2 \cos^3 A}$; et une propriété connue de la circonférence permet d'y remplacer le carré de la demi-corde μL par le produit des deux segments μP, μD du diamètre perpendiculaire, produit évidemment réductible à $2R(\mu P)$, vu que le deuxième segment μD n'est inférieur au diamètre $2R$ que dans un rapport négligeable. L'expression (10) de y'' se réduit donc à $= \frac{1}{R\cos^3 A}$. On peut enfin y supprimer le double signe, en convenant de regarder le rayon R comme positif ou comme négatif, suivant que le centre C du cercle se trouve par rapport au point de contact M, du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, c'est-à-dire suivant que ce rayon MC forme, avec la parallèle MY à l'axe des y positifs, un angle YMC aigu ou obtus. Alors R a constamment le signe de y'', car μ et C sont toujours, évidemment, du même côté du point M, l'angle μMC ne pouvant qu'être aigu dans un cercle où PMC, plus grand, est droit; et il vient

$$(11) \qquad y'' = \frac{1}{R\cos^3 A}.$$

Nous verrons plus loin que le cercle KMLD, mené par trois points différents, comme K, M, L, d'un arc infiniment petit de courbe, s'appelle son *cercle osculateur* ou son *cercle de courbure*, le centre C du cercle, son *centre de courbure*, et, l'inverse du rayon R, sa *courbure*, ou la *courbure de la courbe* UV au point considéré M. Qu'il nous suffise ici, pour justifier ces dernières dénominations, d'observer, d'une part, qu'un cercle est d'*autant plus courbe*, ou a sa tangente d'autant plus variable en direction d'un bout à l'autre d'un arc de longueur donnée, que son rayon est plus petit, en sorte que l'inverse de son rayon peut être regardé comme une mesure de sa *courbure;* d'autre part, que la courbe proposée et, à la limite, le cercle KML ont, en M, même courbure, définie par la manière dont la tangente y tourne sur une longueur infiniment petite. En effet, les trois ordonnées $f(x-h)$, $f(x)$, $f(x+h)$ leur étant communes, les expressions (8) des dérivées y'' et y' de l'ordonnée sont les mêmes en M dans ces deux lignes; et, non seulement la direction de la tangente, caractérisée par le coefficient angulaire y', y est actuellement identique, mais elle est

en train d'y changer, le long d'un arc infiniment petit d'une certaine longueur ML correspondant sensiblement, dans les deux courbes, à un égal accroissement dx de l'abscisse, d'une même manière, exprimée par la dérivée y'' qui mesure la rapidité actuelle de variation du coefficient angulaire y'.

Il suit de là que, si l'on changeait d'axes coordonnés, le cercle osculateur mené à la courbe UV en M, et qu'on peut se représenter comme ayant dans tous ces systèmes d'axes la corde ML, ne changerait pas de rayon, ni, par suite, de centre; car, de M à L, la tangente ne pourrait y tourner toujours sensiblement du même angle, savoir, de celui dont elle tourne dans la courbe, si son rayon R n'était constamment le même à des infiniment petits près. Ainsi, la *courbure*, définie comme il vient d'être fait, est une propriété de la courbe, ne tenant nullement aux axes choisis; et c'est ce que nous reconnaîtrons d'ailleurs plus loin d'une autre manière (vers la fin du n° 60*, p. 73*).

La formule (11) comporte donc un énoncé très simple quand on y introduit cette notion de courbure, surtout lorsque la dérivée première y' ou $\pm$ tang A, au point considéré M de la courbe, est nulle ou du moins fort petite, de manière à permettre d'attribuer à cos A la valeur 1. Elle donne alors $y'' = \frac{1}{R}$; ce qui signifie que, *dans une courbe plane, la dérivée seconde de l'ordonnée considérée comme fonction d'une abscisse perpendiculaire exprime la courbure, en tout point où la tangente fait avec l'axe des abscisses un angle assez petit pour que son cosinus vaille sensiblement l'unité.*

57*. — Courbure d'une famille de lignes planes.

Comme application de cette théorie (p. 112), cherchons quelle est, dans toutes les lignes planes représentées en coordonnées rectangles par l'équation $F(x, y) = c$, l'expression de la courbure $\frac{1}{R}$, définie au n° 52* (p. 66*), et trouvée finalement égale à $y'' \cos^3 A$, d'après la formule (11) [p. 66*]. Nous conviendrons de compter cette courbure, en un point quelconque (x, y), positive, quand son centre se trouvera sur le prolongement de l'élément normal dn le long duquel, à partir de (x, y), la fonction F grandit; et nous la compterons négative dans le cas contraire où la normale menée du point (x, y) à ce centre sera opposée à l'élément dn. Cette nouvelle convention se trouvera d'accord avec celle qui a été faite au n° 52* (où nous prenions pour direction *de repère* celle des y positifs et non l'élément dn) quand l'angle de l'élément dn avec l'axe des y positifs sera aigu, c'est-à-dire quand la

fonction F croîtra le long d'une droite infiniment petite dy menée à partir du point considéré (x, y) dans le sens des y positifs, de sorte qu'on ait $\frac{dF}{dy} > 0$; et l'on devra, au contraire, changer le signe, ou prendre pour courbure $-y''\cos^2 A$, quand la dérivée $\frac{dF}{dy}$ sera négative.

Or l'angle aigu A de l'axe des x avec la tangente en (x, y) à la courbe proposée a pour sa tangente trigonométrique $\frac{\sin A}{\cos A}$, en valeur absolue, la dérivée y', c'est-à-dire, d'après la première expression (21) [p. 110] égalée à zéro, le quotient de $-\frac{dF}{dx}$ par $\frac{dF}{dy}$: par suite, $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ sont entre eux comme $\frac{dF^2}{dx^2}$, $\frac{dF^2}{dy^2}$; et il vient, en particulier,

$$\cos^2 A = \frac{1}{(\Delta_1 F)^2}\frac{dF^2}{dy^2} \quad \text{ou} \quad \cos^3 A = \pm\frac{1}{(\Delta_1 F)^3}\frac{dF^3}{dy^3},$$

le second membre devant être pris en valeur absolue, c'est-à-dire avec le signe supérieur + ou le signe inférieur — suivant que la dérivée $\frac{dF}{dy}$ sera positive ou négative. La courbure $\pm y''\cos^3 A$, où le double signe correspond justement à la même alternative, deviendra ainsi, dans tous les cas, $\frac{1}{(\Delta_1 F)^3}\left(\frac{dF^3}{dy^3}y''\right)$. Il n'y a donc qu'à évaluer le produit $\left(\frac{dF}{dy}\right)^3 y''$; ce qui se fera en multipliant par $\left(\frac{dF}{dy}\right)^2$ le troisième membre, égalé à zéro, de la deuxième relation (21) [p. 110], puis résolvant par rapport au dernier terme et remplaçant, dans les autres, le produit $\frac{dF}{dy}y'$ par sa valeur $-\frac{dF}{dx}$. On trouvera, pour la courbure cherchée,

$$(23)\quad \frac{1}{R} = -\frac{1}{(\Delta_1 F)^3}\left[\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dy}\frac{dF}{dx}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2\frac{d^2F}{dy^2}\right].$$

Quand la fonction $F(x, y)$ a ses dérivées partielles successives finies pour toutes les valeurs finies des variables, comme il arrive dans les courbes algébriques [dont l'équation $F(x, y) = c$ peut toujours avoir pour premier membre un simple polynôme], la courbure n'est évidemment susceptible de devenir infinie que par le fait de l'annulation du dénominateur $(\Delta_1 F)^3$, annulation exigeant qu'on ait tout à la fois $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, ou que le point (x, y) puisse être singulier (p. 48*).

Donc, *en général, les courbes considérées n'ont pas de points où la courbure devienne infinie;* ce qui confirme l'assertion, démontrée autrement au n° 40* (p. 45*), de la parfaite continuité de direction de ces courbes. Mais rien n'empêche que la courbure s'y annule; ce qui, vu la valeur toujours finie et sensible du dénominateur $(\Delta_1 F)^3$ sur ces mêmes courbes, se produira à la condition nécessaire et suffisante que le numérateur correspondant égale zéro, ou qu'on ait

$$(23\,bis)\qquad \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dy}\frac{dF}{dx}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2\frac{d^2F}{dy^2} = 0.$$

La ligne représentée par cette équation (23 *bis*) *en x et y est donc le lieu des points du plan où les courbes de la famille* $F(x, y) = c$ *ont leur courbure nulle.*

L'expression (23) de la courbure admet encore une autre forme, très simple et très symétrique. Pour l'obtenir, rappelons que, si α et β désignent, en chaque point (x, y) du plan, les deux angles faits avec les x et les y positifs par l'élément dn normal à la courbe $F(x, y) = c$ qui y passe, on a, d'après les formules (29) de la Leçon précédente (p. 59*), $\cos\alpha = \frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dx}$, $\cos\beta = \frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dy}$. Or, si l'on prend la dérivée partielle du premier de ces cosinus par rapport à x et celle du second par rapport à y, en remarquant que la dérivée partielle de $\Delta_1 F = \sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2}}$ en x, par exemple, est

$$\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{dF}{dx}\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dx\,dy}\right),$$

on trouve pour la somme $\frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy}$ précisément le second membre de (23) changé de signe. Il vient donc

$$(24)\qquad \frac{1}{R} = -\left(\frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy}\right).$$

Le cas d'une simple courbe, dont on met l'équation sous la forme $y = f(x)$, rentre dans celui de la famille $y - f(x) = c$ obtenue en ajoutant à toutes les ordonnées y une quantité constante quelconque c. Il suffit donc de prendre alors $F(x, y) = y - f(x)$; ce qui donne, pour les deux dérivées de F en x et y, $-f'(x)$ et 1, c'est-à-dire $-y'$ et 1, la dérivée y' étant censée se rapporter à la courbe proposée. Par suite, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ont les valeurs $\frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, et sont des fonctions de x seul. La formule (24) devient donc, en effectuant

finalement la différentiation de $\cos\alpha$,

$$(25)\qquad \frac{1}{R} = -\frac{d\cos\alpha}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3},$$

expression bien d'accord avec la valeur $y''\cos^3 A$ qui a servi de point de départ, car $\cos A$, valeur absolue du cosinus d'un angle qui a pour tangente y', égale bien l'inverse du radical $\sqrt{1+y'^2}$.

59*. — Paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de considérer une fonction de point $F(x, y)$, ou $F(x, y, z)$, le long d'un chemin rectiligne passant par un point donné (x, y), ou (x, y, z), et ayant une direction quelconque, définie par les cosinus a et b, ou a, b et c, de ses angles avec les parties positives des axes rectangulaires pris pour ceux des x et des y, ou des x, des y et des z. Si A, B, ou A, B, C, désignent les coordonnées du point de départ de cette droite et s sa longueur jusqu'au point (x, y) ou (x, y, z), ses projections $x-A$, $y-B$, ou $x-A$, $y-B$, $z-C$, sur les axes, ont évidemment les valeurs respectives as et bs, ou as, bs et cs; de sorte que x et y, ou x, y et z, sont bien des fonctions linéaires de la variable indépendante s. Leurs dérivées respectives étant a et b, ou a, b et c, la formule symbolique de différentiation (17) [p. 108] devient

$$(28)\qquad \frac{d}{ds} = \text{soit } a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy},\quad \text{soit } a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy} + c\frac{d}{dz},$$

conformément, du reste, à la relation (21) de la Leçon précédente (p. 52*); et, d'après (27) [p. 113], la dérivée seconde de la fonction de point reçoit les expressions

$$(29)\qquad \frac{d^2F}{ds^2} = \begin{cases} \text{soit } a^2\dfrac{d^2F}{dx^2} + b^2\dfrac{d^2F}{dy^2} + 2ab\dfrac{d^2F}{dx\,dy}, \\ \text{soit } a^2\dfrac{d^2F}{dx^2} + b^2\dfrac{d^2F}{dy^2} + c^2\dfrac{d^2F}{dz^2} \\ \qquad + 2bc\dfrac{d^2F}{dy\,dz} + 2ca\dfrac{d^2F}{dz\,dx} + 2ab\dfrac{d^2F}{dx\,dy}. \end{cases}$$

Il y a lieu de se demander, comme nous l'avons fait précédemment pour la dérivée première de la fonction le long de l'élément rectiligne (p. 52*), quelle est, au point (x, y) ou (x, y, z), la moyenne des valeurs qu'acquiert cette dérivée seconde, quand la direction (a, b) ou (a, b, c) varie de telle manière que l'élément ds prenne indiffé-

remment toutes les orientations possibles autour du point (x, y) ou (x, y, z). Ce calcul sera pareil à celui de la valeur moyenne du carré de la dérivée première, carré auquel les expressions (29) de $\frac{d^2F}{ds^2}$ deviendraient identiques si l'on remplaçait chaque dérivée seconde de F par le produit des dérivées premières qui se notent au moyen des mêmes symboles $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$. Donc, les moyennes de ab, bc, ca étant nulles et celles de a^2, b^2, c^2 valant $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$, comme on a vu, il viendra les formules, semblables aux secondes (23) et (25) de la Leçon précédente (pp. 53* et 57*),

$$(30)\qquad \left\{ \begin{aligned} \text{moy}\,\frac{d^2F}{ds^2} &= \text{soit } \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2}\right), \\ &\quad \text{soit } \frac{1}{3}\left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Il suit évidemment de là que l'expression

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}$$

reçoit, au point considéré (x, y) ou (x, y, z), la même valeur, $2\,\text{moy}\,\frac{d^2F}{ds^2}$ ou $3\,\text{moy}\,\frac{d^2F}{ds^2}$, quel que soit le système des axes rectangulaires auquel on rapporte l'espace où existe la fonction de point F. Lamé a donné à cette expression le nom de *paramètre différentiel du second ordre* de la fonction, et l'a représentée par le symbole Δ_2 suivi de la lettre désignant la fonction. Ainsi ce symbole Δ_2 est défini par la formule

$$(31)\qquad \Delta_2 = \text{soit } \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}, \quad \text{soit } \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Le paramètre différentiel du second ordre exprime donc, au facteur constant près $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$, ce qu'on peut appeler la dérivée seconde moyenne de la fonction dans l'espace au point considéré, c'est-à-dire la moyenne des valeurs de sa dérivée seconde effective le long de toutes les droites infiniment petites qui s'y croisent.

60*. — Signification géométrique et importance de ce paramètre différentiel.

Mais, d'après la formule (9) [p. 64*], chacune de ces valeurs mesure proportionnellement l'accroissement moyen éprouvé par la fonction quand on s'éloigne de part et d'autre du point considéré (x, y)

ou (x, y, z) à une distance infiniment petite h le long de la droite correspondante, ou, encore, la valeur moyenne de la dérivée, par rapport à h, de la fonction, en ces deux points situés à la distance h de part et d'autre de (x, y) ou de (x, y, z) : en effet, la formule (9) donne, pour l'accroissement moyen en question, $\frac{h^2}{2}\frac{d^2F}{ds^2}$ et, pour la dérivée (en h) correspondante, $h\frac{d^2F}{ds^2}$. Or, à une même distance h tout autour du point (x, y) ou (x, y, z), les points, opposés deux à deux sur les diverses droites $2h$ qui s'y croisent, où l'on évalue ainsi soit l'accroissement éprouvé par la fonction, soit la dérivée de la fonction par rapport à h, se trouvent uniformément répartis sur la circonférence ou sur la sphère décrite du centre (x, y) ou (x, y, z) avec le rayon h. Donc, l'accroissement moyen général de la fonction F sur toute l'étendue de cette circonférence ou de cette sphère, à partir de la valeur $F(x, y)$ ou $F(x, y, z)$ relative au centre, aura pour expression le produit du facteur commun $\frac{1}{2}h^2$ par moy $\frac{d^2F}{ds^2}$ que donne la formule (30); et la dérivée en h du même accroissement moyen, où la valeur moyenne des dérivées premières de la fonction suivant les normales dh à toute cette périphérie, égalera de même le produit de h par moy $\frac{d^2F}{ds^2}$. Ainsi, en appelant F_1 la valeur de la fonction en un point de la circonférence ou de la sphère et, par suite, $\frac{dF_1}{dh}$ sa dérivée dans le sens normal du prolongement dh du rayon qui aboutit à ce point, il viendra

$$(32)\quad \text{moy}(F_1 - F) = \frac{h^2}{4}\Delta_2 F \text{ ou } \frac{h^2}{6}\Delta_2 F, \qquad \text{moy}\frac{dF_1}{dh} = \frac{h}{2}\Delta_2 F \text{ ou } \frac{h}{3}\Delta_2 F.$$

Donc *le paramètre différentiel du second ordre d'une fonction, en un point donné, mesure proportionnellement soit l'accroissement moyen qu'éprouve la fonction tout autour, à une même distance infiniment petite, soit la dérivée moyenne de la fonction suivant tous les éléments rectilignes menés à cette distance et qui s'éloignent du point donné, c'est-à-dire normaux extérieurement à une circonférence ou à une sphère l'ayant comme centre.* Pour ces deux raisons, le paramètre différentiel du second ordre est en quelque sorte la *dérivée par excellence,* une dérivée qui exprime ce qu'il y a de plus général dans la manière dont varie la fonction de point. Aussi joue-t-il un rôle exceptionnel dans la théorie des phénomènes naturels.

Son importance est capitale même en Géométrie pure, comme on

verra surtout au numéro suivant. Contentons-nous ici de nous en servir pour vérifier que l'expression (24) [p. 69*] de la courbure d'une famille de lignes conduit bien à la même valeur de cette courbure, en chaque point du plan, quel que soit le système des axes rectangulaires des x et des y adoptés. Il suffit, pour cela, d'évaluer les dérivées en x et y des deux cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, égaux respectivement à $\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dx}$ et à $\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dy}$, en observant que la différentiation des facteurs $\frac{1}{\Delta_1 F}$ donne en tout, dans la somme $\frac{d\cos\alpha}{dx}+\frac{d\cos\beta}{dy}$, la partie $-\frac{1}{(\Delta_1 F)^2}\left(\frac{d\Delta_1 F}{dx}\frac{dF}{dx}+\frac{d\Delta_1 F}{dy}\frac{dF}{dy}\right)$, ou $-\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{d\Delta_1 F}{dx}\cos\alpha+\frac{d\Delta_1 F}{dy}\cos\beta\right)$, et que, dans celle-ci, la quantité entre parenthèses peut s'écrire simplement $\frac{d\Delta_1 F}{dn}$, d'après la formule symbolique (28) [p. 70*] appliquée à la fonction de point $\Delta_1 F$ pour l'élément rectiligne $ds = dn$ normal en (x, y) à la courbe $F(x, y) = c$. Il vient ainsi

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\cos\alpha}{dx}+\dfrac{d\cos\beta}{dy} = \dfrac{1}{\Delta_1 F}\left(\dfrac{d^2F}{dx^2}+\dfrac{d^2F}{dy^2}\right)-\dfrac{1}{\Delta_1 F}\dfrac{d\Delta_1 F}{dn} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{\Delta_1 F}\left(\Delta_2 F-\dfrac{d\Delta_1 F}{dn}\right), \end{cases}$$

expression où n'entrent que les deux paramètres différentiels de la fonction et la dérivée du premier d'entre eux dans le sens normal aux courbes lieux des points où la fonction est constante. Il n'y figure donc rien de relatif à un système particulier d'axes.

Il est clair que cette transformation s'applique sans aucun changement, dans l'hypothèse d'une fonction $F(x, y, z)$ de trois coordonnées rectangulaires, à la somme $\frac{d\cos\alpha}{dx}+\frac{d\cos\beta}{dy}+\frac{d\cos\gamma}{dz}$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ désignant (p. 59*) les cosinus directeurs $\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dx}$, $\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dy}$, $\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{dF}{dz}$, de l'élément rectiligne dn mené, en (x, y, z), normalement à la surface $F(x, y, z) = c$ qui y passe et, par exemple, du côté où la fonction F grandit. On a donc alors

$$(34)\qquad \frac{d\cos\alpha}{dx}+\frac{d\cos\beta}{dy}+\frac{d\cos\gamma}{dz} = \frac{1}{\Delta_1 F}\left(\Delta_2 F-\frac{d\Delta_1 F}{dn}\right),$$

relation dont la précédente (33) est un cas particulier, celui où la dérivée de F en z s'annule. Ainsi, *dans une famille de surfaces* $F(x, y, z) = c$, *la somme des trois dérivées des cosinus directeurs*

de la normale, par rapport aux coordonnées rectangulaires correspondantes des points où on la mène, est une fonction de ces coordonnées qui ne dépend nullement des axes choisis.

61*. — Courbure moyenne en un point d'une surface : son expression dans une famille de surfaces.

Mais demandons-nous quelle est la signification géométrique de cette somme remarquable

$$(35) \qquad \frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy} + \frac{d\cos\gamma}{dz}.$$

A cet effet, nous souvenant que sa valeur en un point $M(x, y, z)$ ne dépend pas des axes choisis, nous adopterons (*fig.* 14 ci-après) ceux qui paraissent devoir y simplifier le plus possible son expression, savoir deux axes des x et des y parallèles au plan tangent en $M(x, y, z)$ à la surface $F(x, y, z) = c$, que je supposerai être SS_1, et un axe des z dirigé du côté vers lequel la fonction F grandit à partir de (x, y, z); de manière que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ prennent respectivement, en M, les valeurs 0, 0, 1. Comme on aura partout, entre les trois fonctions $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 0,$$

celle-ci, différentiée en z et puis divisée par 2, donnera

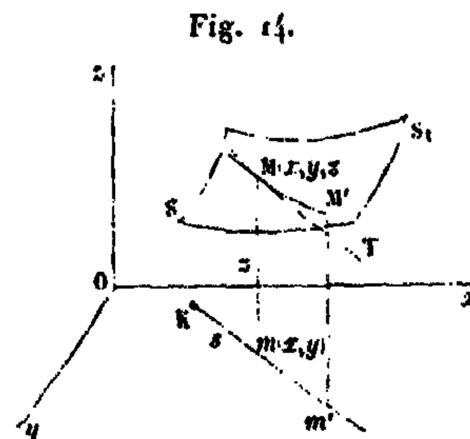
$$(35\ bis) \qquad \cos\alpha\frac{d\cos\alpha}{dz} + \cos\beta\frac{d\cos\beta}{dz} + \cos\gamma\frac{d\cos\gamma}{dz} = 0.$$

Or les dérivées partielles de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, où $\Delta_1 F$ figure comme dénominateur, ne deviennent infinies, au moins quand la fonction $F(x, y, z)$ est partout finie et continue ainsi que ses dérivées partielles, qu'aux points où ce dénominateur $\Delta_1 F$ égale zéro : circonstance exigeant que les trois dérivées de F en x, y, z s'annulent à la fois, ou (p. 51*) que le point (x, y, z) puisse être un point singulier. Abstraction faite de ce cas tout exceptionnel, la relation (35 *bis*) se réduit donc, pour le point proposé où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ont les valeurs 0, 0, 1, à $\frac{d\cos\gamma}{dz} = 0$; ce qui fait disparaître le troisième terme de (35). Mais les deux premiers termes, seuls subsistants, sont deux dérivées de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ obtenues sans cesser de considérer la même surface $F(x, y, z) = c$, puisque les deux éléments rectilignes dx et dy, le long desquels on les évalue, lui sont tangents, ou se confondent avec deux de ses cordes infiniment petites. On peut donc, à la famille

donnée $F(x, y, z) = c$, en substituer toute autre, pourvu que cette surface SS_1 s'y trouve, et, par exemple, imaginant qu'on ait mis l'équation de celle-ci sous la forme $z = f(x, y)$, considérer la famille $z - f(x, y) =$ une constante, dont toutes les surfaces se déduisent de la proposée SS_1 en allongeant ses ordonnées z d'une même quantité positive ou négative. Alors $F(x, y, z)$ est remplacé par $z - f(x, y)$ et $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}, \Delta_1 F$, devenus $-\frac{df}{dx}, -\frac{df}{dy}, 1, \sqrt{1 + \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2}}$, ne dépendent pas de z. Or, dans la parenthèse du second membre de (34), l'élément dn, normal à la surface au point M dont il s'agit, se trouve être justement dirigé suivant les z positifs, de sorte que $\frac{d\Delta_1 F}{dn}$ n'y est autre que $\frac{d\Delta_1 F}{dz}$ et, par conséquent, s'annule. De plus, $\Delta_1 F$ s'y réduit à $\frac{dF}{dz}$ ou 1, vu que, les éléments rectilignes dx et dy étant parallèles au plan tangent ou appartenant à la surface $F(x, y, z) = c$, la fonction F ne varie pas suivant leur longueur et a ses deux dérivées en x et en y nulles. Comme $\Delta_2 F$, de son côté, se réduit à $-\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2}\right)$, c'est-à-dire au paramètre différentiel changé de signe, $-\Delta_2 z$, de l'ordonnée $z = f(x, y)$ supposée fonction de point dans le plan des xy, le second membre de (34) devient en définitive $-\Delta_2 z$; ce qui, sauf le signe, est, d'après la première formule (30) [p. 71*], le double de la valeur moyenne de la dérivée seconde $\frac{d^2 z}{ds^2}$ évaluée, pour le point $m(x, y)$ du plan des xy, suivant toutes les droites, comme $Km = s$, qui s'y croisent.

Cela posé, voyons ce qu'exprime dans la surface donnée SS_1 une pareille dérivée seconde. Menons par l'ordonnée $z = mM$, qui lui est normale en $M(x, y, z)$, et par la droite en question Km du plan des xy, le plan sécant $Km'M'$, et traçons la courbe MM', dite *section normale*, suivant laquelle il coupe la surface SS_1, courbe dont la tangente MT, étant située dans un plan tangent parallèle aux xy, sera elle-même parallèle à Km. Si nous définissons cette courbe par ses ordonnées z, comme Mm, abaissées perpendiculairement sur sa projection Km' prise pour axe d'abscisses s comptées à partir d'une origine K quelconque, son équation sera évidemment celle de la surface $z = f(x, y)$, mais où x et y, coordonnées d'un point, m par

Fig. 14.



exemple, de Km, devront être remplacées par leurs valeurs en fonction de $Km = s$, valeurs linéaires qui sont, comme on a vu, $x = A + as$, $y = B + bs$, A et B désignant les deux coordonnées de l'origine K des abscisses et a, b les cosinus respectifs des angles de Km avec Ox et Oy. Donc, vu le principe démontré à la fin du n° 52* (p. 67*), la dérivée seconde $\frac{d^2 z}{ds^2}$, prise pour le point $M(x, y, z)$ où s'annule le coefficient angulaire $\frac{dz}{ds}$ de la tangente MT, représente la courbure d'un arc infiniment petit MM' de la section normale correspondante. Par suite, le paramètre différentiel considéré, $\Delta_2 z$ ou $2\,\text{moy}\,\frac{d^2 F}{ds^2}$, exprime le double de la valeur moyenne des courbures qu'affectent, au point $M(x, y, z)$, les sections faites dans la surface $F(x, y, z) = c$ par une infinité de *plans* (*normaux*) se croisant suivant la normale qui y passe et offrant indifféremment toutes les orientations sur le plan tangent perpendiculaire. Cette valeur moyenne des courbures de toutes les sections normales en un point d'une surface s'appelle la *courbure moyenne* de la surface pour le point en question; on voit que c'est une quantité parfaitement déterminée, moitié de l'expression (34) changée de signe.

En résumé, pour toute famille de surfaces dont l'équation a la forme $F(x, y, z) = c$, et dont on demande la courbure moyenne, en un point (x, y, z) où l'élément rectiligne dn qui leur est normal fait les angles α, β, γ avec les x, y, z positifs, on peut poser la formule générale

$$(36)\quad \begin{cases} \text{Courbure moyenne} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy} + \frac{d\cos\gamma}{dz}\right) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{2\Delta_1 F}\left(\Delta_2 F - \frac{d\Delta_1 F}{dn}\right); \end{cases}$$

les courbures dont on prend la moyenne s'y comptent positivement, d'après la démonstration donnée, quand leur centre est sur le prolongement de l'élément normal dn, censé mené, à partir du point (x, y, z), du côté où la fonction $F(x, y, z)$ croît; elles y sont, au contraire, comptées négativement quand leur centre se trouve dans la direction normale opposée.

Lorsqu'il s'agit d'une seule surface, dont l'équation est $z = f(x, y)$, on peut la regarder comme faisant partie de la famille $z - f(x, y) = c$, obtenue en ajoutant une même constante quelconque c à toutes les ordonnées, c'est-à-dire en imprimant à cette surface, dans le sens des z, une simple translation plus ou moins grande. Alors les dérivées

ou paramètres $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}, \Delta_1 F, \Delta_2 F$ prennent les valeurs, indépendantes de z,

$$-\frac{df}{dx}, \quad -\frac{df}{dy}, \quad 1, \quad \sqrt{1+\frac{df^2}{dx^2}+\frac{df^2}{dy^2}}, \quad -\left(\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\right),$$

qu'on peut écrire aussi $-\frac{dz}{dx}, -\frac{dz}{dy}, 1, \sqrt{1+(\Delta_1 z)^2}, -\Delta_2 z$, vu que z égale alors, dans la surface proposée, la fonction $f(x, y)$. Les expressions de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, produits respectifs de $\frac{1}{\Delta_1 F}$ par $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$, se simplifient donc et deviennent, notamment, indépendantes de z. En particulier, le second membre de la formule (36) donne

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Courbure moyenne} = {} & \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\Delta_1 z)^2}}\frac{dz}{dx}\right] \\ & +\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\Delta_1 z)^2}}\frac{dz}{dy}\right]. \end{aligned} \right.$$

Il n'est, d'ailleurs, pas nécessaire, pour que cette expression de la courbure moyenne se réduise sensiblement à $\frac{1}{2}\Delta_2 z$, avec une erreur relative inférieure à une quantité donnée quelconque, que le paramètre différentiel $\Delta_1 z$, *pente* de la surface, soit nul. Il suffit qu'il soit assez petit. Car, alors, la *coupe* MM' de la surface par un plan mené suivant l'ordonnée z, qui est à fort peu près normal en M (au plan tangent), a sa tangente MT presque parallèle à l'axe K m' des abscisses s dont il vient d'être parlé, et la formule (11) ci-dessus (p. 66*) donne encore presque exactement, pour sa courbure, la dérivée seconde $\frac{d^2z}{ds^2}$, dont la valeur moyenne est bien $\frac{1}{2}\Delta_2 z$. Or, par raison de continuité, les courbures dont on prend ainsi la moyenne, ou qui sont celles de sections légèrement obliques réparties uniformément autour de l'ordonnée z, ne diffèrent relativement que fort peu des courbures de sections en même nombre ayant leurs plans très voisins des leurs et réparties uniformément autour de la normale, courbures dont la moyenne serait celle même de la surface, qu'exprime la formule (37).

On obtiendra donc une interprétation géométrique très simple du paramètre différentiel Δ_2 de toute fonction de point existant dans un plan horizontal de coordonnées rectangles x, y, en multipliant les valeurs $F(x, y)$ de cette fonction par un même facteur extrêmement petit, mais d'ailleurs quelconque, ε, puis, en menant au plan les très

courtes ordonnées verticales $z = \varepsilon F(x, y)$, de manière à représenter la fonction proportionnellement, par une surface à pentes très faibles $\varepsilon \Delta_1 F(x, y)$: *sa courbure moyenne*, à l'extrémité de l'ordonnée dont le pied est le *point* (x, y), égalera, sauf une erreur relative négligeable, $\frac{1}{2}\Delta_2 z = \frac{\varepsilon}{2}\Delta_2 F$, et *mesurera*, par conséquent, *à un facteur constant près, le paramètre différentiel du second ordre de la fonction donnée.* On voit en effet que, dans (37), le radical $\sqrt{1+(\Delta_1 z)^2}$, ou $\sqrt{1+\varepsilon^2 \Delta_1^2 F(x, y)}$, peut être remplacé par l'unité, et les fonctions entre crochets $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$ par $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, ou par $\varepsilon\frac{dF}{dx}$, $\varepsilon\frac{dF}{dy}$, avec des erreurs relatives partout de l'ordre de ε^2 seulement, c'est-à-dire avec des erreurs absolues, sur ces fonctions entre parenthèses, de l'ordre de ε^3, et ayant leurs dérivées respectives en x et y du même ordre; ce qui donne bien, à fort peu près, $\frac{1}{2}\Delta_2 z$ pour le second membre de (37). La courbure moyenne aurait eu, au contraire, l'expression non simplifiée (37), en rapport bien moins direct avec $\Delta_2 z$, si l'on avait pris $z = F(x, y)$, ou que l'on eût négligé d'atténuer dans le très grand rapport de 1 à ε les pentes $\Delta_1 z$, par la réduction de toutes les ordonnées à leur $\varepsilon^{\text{ième}}$ partie.

Mais revenons à une surface quelconque et à la forme simple, $\Delta_2 z$, que prend le double de sa courbure moyenne en (x, y, z), quand on adopte un plan des xy parallèle au plan tangent mené en ce point à la surface. Cette expression $\Delta_2 z$ se compose des deux termes $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dy^2}$, qui sont les deux valeurs spéciales de $\frac{d^2 z}{ds^2}$ pour les deux sections normales parallèles aux axes rectangulaires des x et des y, dont l'orientation est restée arbitraire dans le plan des xy. Donc, *en tout point d'une surface, les courbures de deux sections normales rectangulaires quelconques ont une somme algébrique constante, égale au double de la courbure moyenne de la surface au même point.* Ce théorème important est dû à Euler, qui l'a trouvé par une tout autre voie. Il se présente ici, on le voit, comme un cas particulier de l'invariabilité des paramètres différentiels du second ordre quand les axes coordonnés changent, de même que, à la fin de la Leçon précédente, le fait de l'invariabilité analogue du paramètre différentiel du premier ordre avait fait reconnaître la constance, en tout point donné d'une surface, de la somme des carrés des pentes des deux sections faites au même point, dans la surface, par deux plans verticaux rectangulaires quelconques.

Observons enfin que la formule (36) comprend celle, (24) [p. 69*],

de la courbure d'une famille $F(x, y) = c$ de *lignes* tracées dans le plan des xy; car, si l'on imagine la famille de *cylindres* $F(x, y) = c$, lieux des droites parallèles à l'axe des z émanées des divers points de ces courbes, chacune de celles-ci $F(x, y) = c$, en un quelconque de ses points, sera une section normale d'un cylindre et, la droite (ou *génératrice*) correspondante, la section normale rectangulaire : leurs courbures respectives étant $\frac{1}{R}$ et zéro, la courbure moyenne du cylindre ne sera autre chose que $\frac{1}{2R}$. Donc le double, $\frac{1}{R}$, admettra bien, d'après (36), l'expression (24), $-\left(\frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy}\right)$, car on aura ici $\frac{dF}{dz} = 0$ ou $\cos\gamma = 0$.

62*. — Des changements de variables.

Les premières variables qui se présentent dans une question et dont, par exemple, l'une, x, est indépendante, tandis que les autres, $y, z, \ldots$, sont fonction de celle-là, ne se trouvent pas toujours les meilleures qu'on puisse y considérer, en ce sens qu'il en existe fréquemment d'autres, liées par des équations assez simples à $x, y, z, \ldots$, et qui, substituées à celles-ci dans les relations que la question comporte, rendent ces relations beaucoup plus faciles à interpréter ou beaucoup plus propres à faire connaître le mode de variation des quantités inconnues. Il y a donc lieu de chercher comment les dérivées successives en x de $y, z, \ldots$, dérivées pouvant figurer dans les relations dont il s'agit, s'exprimeront au moyen des nouvelles variables, $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, qu'on veut substituer à $x, y, z, \ldots$.

Distinguons, parmi ces nouvelles variables, celle qui sera censée indépendante, ξ par exemple. La précédente variable indépendante x variant en même temps qu'elle, chacune des deux égalera une certaine fonction de l'autre; pour fixer les idées, j'appellerai φ la fonction qui exprimera ainsi x au moyen de ξ; autrement dit, je poserai $x = \varphi(\xi)$, et ξ, en tant que dépendant de x, sera la fonction inverse, dont la dérivée $\frac{d\xi}{dx}$ égale, comme on sait, $\frac{1}{\varphi'(\xi)}$. Cela posé, toutes les variables de la question, variant simultanément d'une manière déterminée, sont fonction de l'une quelconque d'entre elles, et l'on peut, d'une part, les regarder comme dépendant de ξ, tandis que l'on regardera, d'autre part, ξ comme dépendant de x. La fonction y, par exemple, sera ainsi fonction de x par l'intermédiaire de ξ; et l'on aura, d'après la règle de la différentiation des fonctions de fonction,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{1}{\varphi'(\xi)}$, relation signifiant que la dérivée par rapport à x de la fonction quelconque y s'obtiendra en multipliant par le facteur $\frac{1}{\varphi'(\xi)}$ la dérivée en ξ de cette fonction y. C'est ce qu'exprimera encore mieux, en appelant pour plus de brièveté x' la dérivée $\varphi'(\xi)$ de x par rapport à ξ, la formule symbolique

$$(38) \qquad \frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d}{d\xi} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi},$$

dans laquelle est laissée en blanc la place de la fonction y, afin qu'on puisse y inscrire, ou encore mettre à la suite, telle fonction de x ou de ξ qu'on voudra. Le problème proposé sera donc résolu pour la dérivée première de toute fonction donnée, si l'on a soin d'exprimer préalablement x au moyen des nouvelles variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, de manière à pouvoir, dans le second membre de (38), remplacer la dérivée $\varphi'(\xi)$ ou x' par une valeur ne dépendant explicitement que de ces variables ou de leurs dérivées en ξ, et si l'on a également soin d'exprimer de même, dans ce second membre, la quantité différentiée qu'on veut éliminer des formules, en fonction des nouvelles variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.

Or la dérivée première $\frac{dy}{dx}$, par exemple, obtenue de la sorte, sera une nouvelle fonction de ξ ou de x à laquelle la règle de différentiation en x exprimée par la formule symbolique (38) ne conviendra pas moins qu'à la fonction y elle-même. On aura donc, pour la dérivée seconde de y en x, puis pour la dérivée troisième, etc., les expressions, de plus en plus compliquées,

$$(39) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{x'}\frac{dy}{d\xi}\right), \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{x'}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{x'}\frac{dy}{d\xi}\right)\right], \ldots$$

Développons les calculs en désignant, pour abréger, par y', la dérivée de y par rapport à ξ, et en nous souvenant de la règle de différentiation d'une fraction (p. 38). Il viendra, après des réductions immédiates, en commençant par la dérivée première et appelant, d'ailleurs, x'', x''', ..., y'', y''', ... les dérivées successives de x et y en ξ,

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y''-y'x''}{x'^3}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y'''-y'x''')-3x''(x'y''-y'x'')}{x'^5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On voit que l'ancienne dérivée d'un certain ordre d'une fonction exigera généralement, pour son expression au moyen des nouvelles variables, l'emploi de toutes les nouvelles dérivées successives tant de cette *fonction* que de l'ancienne variable indépendante, jusqu'à celles de l'ordre considéré.

Si l'on prend, en particulier, comme fonction y, la nouvelle variable indépendante ξ, fonction inverse de $x = \varphi(\xi)$, on aura pour sa dérivée première y' la valeur $\frac{d\xi}{d\xi}$ ou 1; et, par suite, les dérivées plus élevées y'', y''', ... seront nulles. Il viendra

$$(41)\quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x'},\qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{x''}{x'^3},\qquad \frac{d^3\xi}{dx^3} = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5},\qquad \cdots$$

Telles sont donc les relations existant entre les dérivées successives d'une certaine fonction x de ξ et les dérivées de la fonction inverse ξ considérée comme dépendant de x. La première de ces relations nous redonne la formule, déjà rappelée tant de fois, de la dérivée première d'une fonction inverse.

63*. — Exemples de simplifications produites par de tels changements.

Voici trois exemples, dont les deux premiers sont très importants, des simplifications que peuvent produire dans les formules d'un problème certains changements de variables.

Proposons-nous de trouver l'expression générale des fonctions y de x auxquelles leur dérivée est constamment proportionnelle, ou qui, en d'autres termes, satisfont pour toutes les valeurs de x à l'équation $\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0$, α désignant le coefficient donné de proportionnalité. Cette équation peut s'écrire encore, sous une forme en partie symbolique,

$$(42)\qquad \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)y = 0,$$

l'expression $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)y$ signifiant qu'on doit opérer comme si $\frac{d}{dx} - \alpha$ était une quantité algébrique à multiplier par y, sauf ensuite à ne regarder, dans le résultat, la multiplication comme effective que pour le terme $-\alpha y$, le seul qui puisse être un produit, et à l'interpréter dans le sens d'une différentiation pour l'autre terme $\frac{d}{dx}y$ ou $\frac{dy}{dx}$, qui est visiblement une dérivée et ne comporte pas d'autre sens. On voit

de suite que cette équation, divisée par α, devient $\frac{dy}{\alpha\,dx} - y = 0$, ou $\frac{dy}{d(\alpha x)} - y = 0$, et que, si l'on prend αx pour nouvelle variable ξ, la constante α n'y paraîtra plus. Posons, en effet,

$$\xi = \alpha x; \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{\xi}{\alpha}, \qquad x' = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{dy}{dx} = \alpha\frac{dy}{d\xi};$$

l'équation $\frac{1}{\alpha}\frac{dy}{dx} - y = 0$ se réduira bien à $\frac{dy}{d\xi} - y = 0$. La fonction y de ξ égale donc sa dérivée, comme l'exponentielle e^{ξ}; ce qui porte à penser qu'elle doit varier de la même manière qu'elle, ou lui rester proportionnelle. Le rapport de y à e^{ξ} ayant ainsi, vraisemblablement, une expression très simple, prenons-le pour notre nouvelle fonction η, ou posons $y = e^{\xi}\eta$. Le produit $e^{\xi}\eta$, substitué à y dans l'équation, avec sa dérivée en ξ qui est $e^{\xi}\frac{d\eta}{d\xi} + e^{\xi}\eta$, donne, après réduction, en divisant finalement par le facteur e^{ξ} (fini et différent de zéro pour toutes les valeurs finies de ξ), $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$; et l'équation du problème se trouve, de la sorte, tellement simple, que son interprétation devient immédiate, puisqu'elle exprime que la fonction η, ayant sa dérivée identiquement nulle, peut être une constante quelconque c, mais pas autre chose. Donc l'expression générale cherchée de y est ce^{ξ}, c'est-à-dire $ce^{\alpha x}$.

Compliquant un peu la question, cherchons, en deuxième lieu, des fonctions de x dont la dérivée seconde se compose de deux parties, proportionnelles, l'une, à la fonction même y, l'autre, à sa dérivée première. Cette seconde partie est $2\alpha\frac{dy}{dx}$, si α désigne la moitié de son coefficient, et l'autre partie, produit de y par une constante, peut toujours se mettre sous la forme $-(\alpha^2 \pm \beta^2)y$, en appelant β^2 la valeur absolue de la somme, négative ou positive, de cette constante et du carré α^2 de la précédente α. Le problème est donc défini par l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha\frac{dy}{dx} - (\alpha^2 \pm \beta^2)y \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2\alpha\frac{dy}{dx} + \alpha^2 y\right) \pm \beta^2 y = 0.$$

On peut l'écrire aussi, d'une manière en partie symbolique comme la précédente (42),

$$(43) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\alpha\frac{d}{dx} + \alpha^2\right)y \pm \beta^2 y = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 y \pm \beta^2 y = 0,$$

l'expression $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2$ désignant, à volonté, soit le développement $\frac{d^2}{dx^2} - 2\alpha\frac{d}{dx} + \alpha^2$, qui en serait le carré si $\frac{d}{dx}$ exprimait une quantité, soit la répétition de l'opération indiquée par $\frac{d}{dx} - \alpha$, c'est-à-dire (vu la lettre y qui suit) l'expression $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{dy}{dx} - \alpha y\right)$, qui signifie qu'il faut prendre la dérivée en x de la fonction $\frac{dy}{dx} - \alpha y$ et en retrancher le produit de α par cette même fonction. En effet, cette expression revient au développement trinôme précédent, par suite de ce fait que le terme $-\alpha y$ a son coefficient α constant et ne donne lieu dans la différentiation à aucun dédoublement; en sorte que cette opération s'y indique à la manière de la multiplication algébrique d'une fraction variable $\frac{d}{dx}$ par $-\alpha y$, dont le produit serait $-\alpha\frac{dy}{dx}$.

Comme nous venons de voir que l'expression $\frac{dy}{dx} - \alpha y$ était fort simplifiée par la substitution, à y, de la nouvelle variable η_1 obtenue en posant $y = \eta_1 e^{\alpha x}$, introduisons celle-ci. La dérivée de $\eta_1 e^{\alpha x}$ sera $\frac{d\eta_1}{dx}e^{\alpha x} + \alpha\eta_1 e^{\alpha x}$, et il viendra, pour son excédent sur αy, $\frac{d\eta_1}{dx}e^{\alpha x}$. Cette expression est analogue à celle, $\eta_1 e^{\alpha x}$, d'où l'on est parti, et, en lui appliquant l'opération indiquée par le nouveau facteur symbolique $\frac{d}{dx} - \alpha$, elle donne de même $\frac{d^2\eta_1}{dx^2}e^{\alpha x}$. La seconde équation (43), divisée par $e^{\alpha x}$, puis par β^2, devient donc

$$(44) \qquad \frac{d^2\eta_1}{dx^2} \pm \beta^2\eta_1 = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{1}{\beta^2}\frac{d^2\eta_1}{dx^2} \pm \eta_1 = 0;$$

et il suffit enfin de prendre pour nouvelle variable indépendante ξ le produit βx, c'est-à-dire de poser

$$x = \frac{\xi}{\beta}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{dx} = \beta\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{d^2\eta_1}{dx^2} = \beta\frac{d}{d\xi}\left(\beta\frac{d\eta_1}{d\xi}\right) = \beta^2\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2},$$

pour la ramener à la forme, extrêmement simple, $\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} \pm \eta_1 = 0$. Donc la question proposée revient à chercher les fonctions η_1 de ξ qui égalent en valeur absolue leur dérivée seconde, en ayant signe contraire ou même signe suivant qu'il s'agit de prendre, dans (43), le terme $\pm\beta^2 y$ avec le signe supérieur + ou avec le signe inférieur −. On voit immédiatement que, dans le premier cas, les fonctions $\eta_1 = \cos\xi = \cos\beta x$

et $\eta = \sin\xi = \sin\beta x$ satisferont à l'équation (44), et, par suite, les expressions $y = e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x)$, à l'équation proposée (43); tandis que, dans le second cas, les solutions, analogues aux précédentes, $\eta = \cosh\xi$ ou $\sinh\xi$, $y = e^{\alpha x}(\cosh\beta x \text{ ou } \sinh\beta x)$, et la solution encore plus simple $\eta = e^{\xi}$, $y = e^{\alpha x}e^{\beta x} = e^{(\alpha+\beta)x}$, s'offrent de même au premier coup d'œil. Et l'on peut d'ailleurs y prendre à volonté la constante β, définie uniquement comme racine carrée de la quantité positive donnée β^2, avec le signe $+$ ou le signe $-$; ce qui ne change rien, du moins en valeur absolue, à ces expressions de y où entre soit un sinus, soit un cosinus, naturels ou hyperboliques; mais ce qui a plus d'importance pour la dernière expression $y = e^{(\alpha+\beta)x}$, qui donne alors les deux exponentielles distinctes $y = e^{(\alpha\pm\beta)x}$.

En résumé, le changement effectué des variables, en ramenant l'équation (43) à la forme élémentaire $\eta'' = \mp\eta$, nous a fait connaître immédiatement, pour cette équation (43) : 1° les deux solutions

$$y = e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x),$$

quand le dernier terme $\pm\beta^2 y$ est pris avec le signe supérieur $+$, et, 2°, à volonté, les deux solutions

$$y = e^{\alpha x}(\cosh\beta x \text{ ou } \sinh\beta x), \quad \text{ou les deux,} \quad y = e^{(\alpha\pm\beta)x},$$

quand ce dernier terme $\pm\beta^2 y$ est pris, au contraire, avec le signe inférieur $-$. Il appartient au Calcul intégral de montrer que l'expression générale demandée de y s'obtient en faisant, dans chaque cas, la somme des deux solutions ou expressions particulières ainsi trouvées, après les avoir multipliées respectivement par deux constantes arbitraires c, c_1.

Enfin, comme troisième exemple, supposons la fonction y de x astreinte à vérifier l'équation

$$(45) \qquad \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2\left(2A - l^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) = (1 \pm k^2)y,$$

qui est précisément celle du problème de la charge roulante auquel il a été fait allusion à la fin de l'avant-dernière Leçon (p. 79) : A, l, k y sont trois constantes positives et x y varie de $-l$ à l. J'ai reconnu qu'il convenait de prendre pour variable indépendante ξ le nombre dont la tangente hyperbolique égale le rapport $\frac{x}{l}$, nombre croissant de $-\infty$ à ∞ pendant que ce rapport grandit de -1 à 1, et, pour fonction η, le produit de $\frac{y}{A}$ par $\cosh\xi$. Posons donc : d'une part,

$$(46) \quad x = l\,\text{tangh}\,\xi; \qquad \text{d'où} \qquad x' = \frac{l}{\cosh^2\xi} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dx} = \frac{\cosh^2\xi}{l}\frac{d}{d\xi};$$

d'autre part,

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} & y = \frac{A\eta}{\cosh\xi}; \\ & \text{d'où} \\ & \frac{dy}{dx} = A\,\frac{\cosh^2\xi}{l}\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\eta}{\cosh\xi}\right) = \frac{A}{l}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\cosh\xi - \eta\sinh\xi\right), \\ & \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{l^2}\cosh^2\xi\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\cosh\xi - \eta\sinh\xi\right) = \frac{A}{l^2}\cosh^3\xi\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \eta\right). \end{aligned}\right.$$

L'équation (45), où, d'ailleurs, $1 - \frac{x^2}{l^2} = 1 - \tanh^2\xi$ ne sera autre chose que l'inverse de $\cosh^2\xi$, deviendra finalement, par deux réductions évidentes,

$$(48)\qquad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \pm k^2\eta = \frac{2}{\cosh^3\xi}.$$

Elle ne diffère de la précédente (44), sauf les changements de β en k et de x en ξ, que par l'addition, au second membre, d'un terme fonction explicite de la variable indépendante; et l'on verra dans le Calcul intégral comment ses solutions se déduisent de celles de l'équation plus simple (44).



COMPLÉMENT A LA SEPTIÈME LEÇON.

DES CHANGEMENTS DE VARIABLES QUAND IL Y EN A PLUSIEURS INDÉPENDANTES; APPLICATIONS AUX FONCTIONS DE POINT ET A L'ISOTROPIE DES CORPS.

67*. — Changement des variables.

Imaginons que, u étant une certaine fonction de x, y, z, on veuille remplacer ces variables indépendantes par d'autres, ξ, η, ζ, liées aux premières au moyen d'équations de la forme

(13) $$(x, y, z) = \text{des fonctions données de } \xi, \eta, \zeta.$$

Par exemple, x, y, z peuvent être des coordonnées rectilignes des divers points de l'espace où existe une fonction de point u, et l'on propose de remplacer ces coordonnées par d'autres, ξ, η, ζ, soit rectilignes aussi, soit polaires, etc., qui, sans changer les valeurs de la fonction aux divers points, en altéreront l'expression. Alors il y a lieu de chercher, comme nous l'avons fait (p. 79*) pour le cas de fonctions d'une seule variable, de quelle manière s'évalueront, au moyen de ξ, η, ζ, les dérivées successives de u par rapport à x, y, z.

A cet effet, on emploiera le procédé déjà suivi, qui consiste à considérer une fonction des anciennes variables x, y, z comme en dépendant par l'intermédiaire des nouvelles ξ, η, ζ, à la manière des fonctions de fonction et même, ici, des fonctions composées. On aura donc, en faisant, par exemple, varier x et, par suite, ξ, η, ζ, sans que y ni z changent,

(14) $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{du}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} + \frac{du}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx}.$$

Seulement, pour que le second membre soit la nouvelle valeur, exprimée en ξ, η, ζ, de l'ancienne dérivée $\frac{du}{dx}$, il restera à y remplacer les dérivées de ξ, η, ζ en x, qu'on peut écrire toutes à la fois $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dx}$, par des valeurs où ne figurent que ξ, η, ζ eux-mêmes. Dans ce but, on

différentiera, par rapport à x ou sans que y ni z varient, les équations (13), dites ***équations de la transformation*** opérée. Autrement dit, on fera varier ξ, η, ζ de manière que les accroissements simultanés, dx, dy, dz, de x, y, z, divisés par dx, donnent comme quotients 1, 0, 0. Il viendra évidemment, en prenant ces quotients pour seconds membres et désignant par x, y, z les fonctions mêmes de ξ, η, ζ qui expriment ces anciennes variables,

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx}+\dfrac{dx}{d\eta}\dfrac{d\eta}{dx}+\dfrac{dx}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{dx}=1,\\[2mm] \dfrac{dy}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx}+\dfrac{dy}{d\eta}\dfrac{d\eta}{dx}+\dfrac{dy}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{dx}=0,\\[2mm] \dfrac{dz}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx}+\dfrac{dz}{d\eta}\dfrac{d\eta}{dx}+\dfrac{dz}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{dx}=0. \end{cases}$$

Ce sont, par rapport aux dérivées cherchées $\dfrac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dx}$, des équations du premier degré, dont les coefficients, dérivées partielles premières des fonctions de ξ, η, ζ appelées x, y, z, contiennent justement et uniquement les nouvelles variables : donc la résolution de ce système donnera les valeurs demandées de $\dfrac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dx}$. J'en indiquerai les résultats d'une manière assez simple, en appelant K le *déterminant de la transformation*, ou dénominateur commun,

$$(16)\quad \begin{cases} K=\dfrac{dx}{d\xi}\left(\dfrac{dy}{d\eta}\dfrac{dz}{d\zeta}-\dfrac{dz}{d\eta}\dfrac{dy}{d\zeta}\right)+\dfrac{dy}{d\xi}\left(\dfrac{dz}{d\eta}\dfrac{dx}{d\zeta}-\dfrac{dx}{d\eta}\dfrac{dz}{d\zeta}\right)\\[2mm] \qquad\qquad +\dfrac{dz}{d\xi}\left(\dfrac{dx}{d\eta}\dfrac{dy}{d\zeta}-\dfrac{dy}{d\eta}\dfrac{dx}{d\zeta}\right), \end{cases}$$

déterminant ordonné ici par rapport à ses éléments $\dfrac{d(x, y, z)}{d\xi}$, mais qui pourrait l'être de même par rapport à $\dfrac{d(x, y, z)}{d\eta}$ ou à $\dfrac{d(x, y, z)}{d\zeta}$. Il est, dans tous ses termes, du premier degré relativement à chacune de ces séries d'éléments, en sorte que, si l'on y regarde tous les éléments $\dfrac{d(x, y, z)}{d(\xi, \eta, \zeta)}$ comme autant de variables distinctes, les coefficients entre parenthèses, dont se trouvent affectés, dans (16), $\dfrac{dx}{d\xi}, \dfrac{dy}{d\xi}, \dfrac{dz}{d\xi}$, ne seront autre chose que ses dérivées partielles premières par rapport à ces éléments, dérivées indépendantes de ceux-ci ; et l'on aura

$$(16\ bis)\qquad K=\frac{dx}{d\xi}\frac{dK}{d\frac{dx}{d\xi}}+\frac{dy}{d\xi}\frac{dK}{d\frac{dy}{d\xi}}+\frac{dz}{d\xi}\frac{dK}{d\frac{dz}{d\xi}}.$$

Or l'expression d'une inconnue, de $\frac{d\xi}{dx}$ par exemple, a pour dénominateur K, et a, comme on sait, pour numérateur, ce que devient K lorsqu'on y remplace les coefficients $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$, $\frac{dz}{d\xi}$ de cette inconnue dans les équations (15), par les seconds membres correspondants connus, 1, 0, 0, de celles-ci, c'est-à-dire lorsque, dans le second membre de (16) ou de (16 *bis*), on substitue respectivement 1, 0, 0, aux premiers facteurs $\frac{d(x, y, z)}{d\xi}$. Il vient, en joignant finalement à la formule obtenue celles qu'on trouve de même pour les deux autres dérivées cherchées $\frac{d(\eta, \zeta)}{dx}$,

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{K}\,\frac{dK}{d\frac{dx}{d\xi}}, \qquad \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{K}\,\frac{dK}{d\frac{dx}{d\eta}}, \qquad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{K}\,\frac{dK}{d\frac{dx}{d\zeta}}.$$

Grâce à ces valeurs, le second membre de l'équation (14) ne dépendra donc plus, explicitement, que de ξ, η, ζ; et la formule de transformation demandée sera

$$(17) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{K}\left(\frac{dK}{d\frac{dx}{d\xi}}\,\frac{du}{d\xi} + \frac{dK}{d\frac{dx}{d\eta}}\,\frac{du}{d\eta} + \frac{dK}{d\frac{dx}{d\zeta}}\,\frac{du}{d\zeta}\right).$$

On montrera qu'elle s'applique à toute fonction de x, y, z, ou de ξ, η, ζ, en y effaçant la lettre u; ce qui en fera une formule symbolique, du genre de celles dont il a été souvent question dans la Leçon précédente, c'est-à-dire propre à exprimer une certaine manière d'opérer sur la fonction qu'on inscrira à la suite de chaque membre ou de chaque terme. Et comme, pour différentier en y ou en z, on en aurait évidemment d'autres analogues, dans lesquelles figureraient les dérivées du déterminant K, encore le même, non plus par rapport aux éléments $\frac{dx}{d(\xi, \eta, \zeta)}$, mais par rapport à $\frac{dy}{d(\xi, \eta, \zeta)}$ ou à $\frac{dz}{d(\xi, \eta, \zeta)}$, il viendra, en définitive, pour effectuer la transformation qu'on a en vue, la formule multiple

$$(18) \qquad \frac{d}{d(x, y, z)} = \frac{1}{K}\left[\frac{dK}{d\frac{d(x, y, z)}{d\xi}}\,\frac{d}{d\xi} + \frac{dK}{d\frac{d(x, y, z)}{d\eta}}\,\frac{d}{d\eta} + \frac{dK}{d\frac{d(x, y, z)}{d\zeta}}\,\frac{d}{d\zeta}\right].$$

où toutes les parenthèses (x, y, z) doivent, dans chaque application qu'on fera, être partout remplacées soit par la première des lettres qu'elles contiennent, soit par la seconde, etc.

Du reste, une fois que les dérivées premières en x, y, z des fonctions proposées $u, v, w, \ldots$ se trouvent exprimées de la sorte en ξ, η, ζ, ce sont de nouvelles fonctions de ξ, η, ζ; et leur propre différentiation en x, y, z se fait, par conséquent, au moyen des formules symboliques (18), de même que, dans le cas d'une seule variable indépendante, deux applications successives de la formule (38) de la dernière Leçon [p. 80*] avaient donné une dérivée seconde en x. De proche en proche, on obtiendra donc en fonction de ξ, η, ζ, toujours par le même procédé, les dérivées partielles de tous les ordres des fonctions $u, v, w, \ldots$ par rapport aux anciennes variables x, y, z. Et la question sera résolue.

Si l'on ne se contentait pas de changer les variables indépendantes, mais qu'on voulût aussi remplacer les fonctions $u, v, w, \ldots$ par d'autres, U, V, W, ..., reliées à elles et à ξ, η, ζ au moyen de certaines équations, il suffirait évidemment de substituer, à $u, v, w, \ldots$, leurs valeurs en ξ, η, ζ, U, V, etc., dans les seconds membres de la relation (17) et de toutes les autres relations semblables.

68*. — Exemple, dans un cas où l'on ne change pas toutes les variables indépendantes.

Appliquons cette théorie à un exemple tiré de l'*Hydrodynamique*. Supposons que x, y, z soient les coordonnées, à l'époque t, des diverses particules d'une certaine masse fluide en mouvement, rapportée à un système d'axes rectangulaires fixes, et que ξ, η, ζ désignent les coordonnées de ces mêmes particules dans un certain état spécial du fluide, état soit réel, soit seulement fictif, qu'on prend comme point de départ ou terme de comparaison. Il est clair que les coordonnées *actuelles* x, y, z sont certaines fonctions, non seulement de t, mais aussi (en tant que variables avec la particule) des coordonnées, dites *primitives*, ξ, η, ζ : ce qui n'empêche pas de pouvoir aussi considérer x, y, z comme variables indépendantes, car les phénomènes produits, à l'époque t, dans les diverses régions (x, y, z) de l'espace occupé par le fluide, s'expriment évidemment par des fonctions de point où figurent ces coordonnées actuelles x, y, z. Ainsi, les équations (13) de la transformation contiendront ici t dans leurs seconds membres, en outre de ξ, η, ζ. Cela posé, l'état actuel de mouvement du fluide est défini par les trois dérivées $\frac{d(x, y, z)}{dt}$, qui sont, au point

(x, y, z), les trois *vitesses* du fluide suivant les axes et constituent trois certaines fonctions de ξ, η, ζ, t ou de x, y, z, t : on les désigne, pour abréger, par u, v, w; et l'on démontre, par exemple, en appelant ρ la densité de la particule située actuellement en (x, y, z), que la dérivée de $-\log\rho$, prise par rapport au temps en suivant cette particule ou sans que ξ, η, ζ varient, a pour valeur

$$(19) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Proposons-nous de voir ce que devient cette valeur quand on l'exprime en fonction de ξ, η, ζ. L'emploi des formules (18) la change d'abord en

$$\frac{1}{K}\left[\frac{dK}{d\frac{dx}{d\xi}}\frac{du}{d\xi} + \frac{dK}{d\frac{dx}{d\eta}}\frac{du}{d\eta} + \frac{dK}{d\frac{dx}{d\zeta}}\frac{du}{d\zeta} + \frac{dK}{d\frac{dy}{d\xi}}\frac{dv}{d\xi} + \dots\right].$$

Or, comme u, v, w désignent les trois dérivées $\frac{d(x, y, z)}{dt}$, prises sans faire varier ξ, η, ζ, la quantité entre crochets est la somme des produits obtenus en multipliant chaque dérivée partielle première du déterminant K, relative à l'un quelconque des neuf éléments dont il dépend, par la dérivée même, en t, de cet élément; ou, autrement dit, elle est la dérivée complète de K par rapport au temps, obtenue sans faire varier ξ, η, ζ. Ainsi, l'expression (19) devient simplement $\frac{1}{K}\frac{dK}{dt}$, ou $\frac{d\log K}{dt}$, dans le système de variables ξ, η, ζ, t; et, comme elle exprime la valeur de la dérivée $-\frac{d\log\rho}{dt}$, considérée dans le même système de variables, on voit que la fonction $\log K + \log\rho$, ou $\log(K\rho)$, prise à diverses époques t, mais pour la même particule primitivement située en (ξ, η, ζ), a sa dérivée constamment nulle. Cette fonction est donc indépendante du temps; de sorte que K et ρ varient en raison inverse l'un de l'autre, d'instant en instant. Ainsi, le déterminant K, défini par (16), représente proportionnellement, aux diverses époques et pour une même particule, l'inverse de sa densité. On aurait pu reconnaître autrement ce fait; mais il était bon de montrer ici, comme exemple des simplifications pouvant résulter d'un changement de variables, que l'introduction de ξ, η, ζ à la place de x, y, z réduit l'expression (19) à $\frac{d\log K}{dt}$.

La question traitée comportait, comme la plupart des applications physiques de l'Analyse, quatre variables indépendantes, savoir ξ, η, ζ, t

dans un système de variables et x, y, z, t dans l'autre. Si trois équations seulement, (18), de transformation des dérivées nous ont suffi, c'est parce qu'une des variables, t, se trouvait commune aux deux systèmes, et aussi parce que nous n'avions à considérer des dérivées par rapport à cette variable commune que dans le nouveau système, celui où les dérivées en t se prennent sans faire varier ξ, η, ζ. Si nous avions eu à en considérer également dans le système x, y, z, t, où elles se prennent sans faire varier x, y, z et non plus ξ, η, ζ, il aurait été convenable, pour éviter de confondre ces dérivées avec les précédentes, de donner deux noms différents à la variable t, de l'appeler, par exemple, τ, quand elle figure à côté de ξ, η, ζ, et t, quand elle est associée à x, y, z. Alors l'ensemble des équations de la transformation aurait été constitué par la relation évidente $t = \tau$, jointe aux relations (13) devenues

$$(x, y, z) = \text{des fonctions de } \xi, \eta, \zeta, \tau.$$

Les dérivées désignées ci-dessus par $\frac{d}{dt}$ se seraient donc écrites $\frac{d}{d\tau}$, et la notation $\frac{d}{dt}$ aurait exprimé uniquement des dérivées prises *sur place*, c'est-à-dire sans faire varier les coordonnées *actuelles* x, y, z, ou en considérant les valeurs successives des fonctions de point en un même endroit (x, y, z). Quant aux dérivées $\frac{d}{d\tau}$, obtenues, au contraire, sans que ξ, η, ζ varient, ou sans que les coordonnées primitives du point considéré changent et, par conséquent, en suivant une même particule, elles seraient, en comparaison, des dérivées *complètes* par rapport au temps, évaluées en faisant croître à la fois t, x, y, z, respectivement, de $dt = d\tau$, $dx = u\,d\tau$, $dy = v\,d\tau$, $dz = w\,d\tau$; ce qui donne

$$\frac{d}{d\tau} \text{ ou } \frac{d_c}{dt} = \frac{d}{dt} + u\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy} + w\frac{d}{dz}.$$

Si l'on voulait ne pas consacrer deux lettres différentes, t et τ, à la variable commune, il faudrait donc, tout au moins, pouvoir distinguer les dérivées prises par rapport à cette variable dans un des systèmes de celles qui le sont dans l'autre; et l'on voit qu'on y parviendrait en considérant comme des dérivées *complètes*, dans le premier système, celles qui sont *partielles*, dans le second. On pourrait aussi convenir d'employer des lettres d de différentes formes, comme, par exemple, des d dans le système des x, y, z, t et des ∂ dans le système des ξ, η, ζ, t.

Ces remarques s'appliqueront évidemment toutes les fois que l'on changera une partie seulement des variables d'une question.

69*. — Expressions diverses du paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point.

Comme seconde application de la même théorie, voyons encore ce que devient, en coordonnées polaires, l'expression du paramètre différentiel du second ordre Δ_2 d'une fonction de point.

Commençons par le cas d'un espace plan, que nous supposerons, pour fixer les idées, horizontal. Un point quelconque, dont x et y désigneront les coordonnées ordinaires rectangles, aura pour coordonnées *polaires*, d'une part, l'angle θ, dit *angle polaire* ou *azimut*, et variable de $-\pi$ à π ou de zéro à 2π, que fait avec l'axe des x positifs (en tournant dans le sens de cet axe vers celui des y positifs) le *rayon vecteur* $r=\sqrt{x^2+y^2}$ mené de l'origine à ce point (x, y), d'autre part, la longueur même, r, du *rayon* vecteur. Alors les formules (13), où ξ, η deviennent r et θ, se réduisent, comme on sait, à

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

et les dérivées en r et en θ de x et de y, au nombre de quatre seulement, sont $\cos\theta$, $-r\sin\theta$ pour x, et $\sin\theta$, $r\cos\theta$ pour y. Le déterminant K, réduit ici à $\frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\theta}-\frac{dy}{dr}\frac{dx}{d\theta}$, égale donc $r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$, ou simplement r, et les dérivées de K par rapport à ses deux éléments $\frac{dx}{d(r,\theta)}$ sont $\frac{dy}{d\theta}$, $-\frac{dy}{dr}$, c'est-à-dire $r\cos\theta$, $-\sin\theta$, tandis que ses dérivées par rapport aux éléments $\frac{dy}{d(r,\theta)}$ sont $-\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{dx}{dr}$, c'est-à-dire $r\sin\theta$ et $\cos\theta$. Les formules symboliques (18) deviennent donc

$$(20)\qquad \frac{d}{dx}=\cos\theta\frac{d}{dr}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{d}{d\theta}, \qquad \frac{d}{dy}=\sin\theta\frac{d}{dr}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{d}{d\theta}.$$

On les aurait aussi obtenues, un peu plus simplement même, en évaluant les dérivées de r et θ en x ou en y par la différentiation des équations de transformation $r^2=x^2+y^2$ et $\tang\theta=\frac{y}{x}$, déduites de celles qu'on a adoptées $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, et en substituant ensuite, dans les résultats, à x et à y, les valeurs $r\cos\theta$, $r\sin\theta$.

Par suite, si F désigne la fonction de point dont on veut prendre

le paramètre $\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$, on trouve d'abord

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \left(\cos\theta\frac{d}{dr} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{d}{d\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{dF}{dr} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{dF}{d\theta}\right)$$
$$= \cos^2\theta\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\frac{dF}{dr}\right)$$
$$-\cos\theta\sin\theta\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dF}{d\theta}\right) + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}\right),$$

et, au moyen de la seconde formule (20), une expression analogue pour $\frac{d^2F}{dy^2}$. En les ajoutant après avoir effectué les différentiations, indiquées par rapport à θ, de produits entre parenthèses, il vient de suite, vu la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

$$(21)\qquad \Delta_2 F = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\theta^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\theta^2};$$

ce qui peut aussi s'écrire, en posant finalement $\log r = \rho$, ou $r = e^\rho$, et observant qu'il en résulte $\frac{d}{d\rho} = \frac{dr}{d\rho}\frac{d}{dr} = e^\rho\frac{d}{dr} = r\frac{d}{dr}$,

$$(22)\qquad \Delta_2 F = \frac{1}{r^2}\left[r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right) + \frac{d^2F}{d\theta^2}\right] = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2F}{d\rho^2} + \frac{d^2F}{d\theta^2}\right).$$

Pour avoir $\Delta_2 F$ dans le cas de trois variables x, y, z, il suffit évidemment d'ajouter à ces expressions le terme $\frac{d^2F}{dz^2}$, si l'on veut adopter ce qu'on appelle des *coordonnées cylindriques* ou *semi-polaires* comprenant, avec *l'ordonnée* normale z abaissée du point proposé (x, y, z) sur le plan des xy, le *rayon vecteur* r et l'*azimut* θ du *pied* (x, y) de cette ordonnée; car les dérivées successives de F en x et en y seront encore prises en cheminant dans un plan où r et θ changeront seuls, et changeront ou même se comporteront exactement comme s'il était le plan des coordonnées polaires r, θ, vu l'égalité des valeurs de r et de θ aux deux extrémités de toute ordonnée z. Le second membre de (21) donne donc alors

$$(23)\qquad \Delta_2 F = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\theta^2}.$$

Dans cette expression de $\Delta_2 F$, le dernier terme contient une dérivée prise par rapport à θ, c'est-à-dire sans que z et r changent, ou le long d'une circonférence horizontale ayant son centre sur l'axe des z, tandis

que les trois autres termes contiennent des dérivées en r ou en z, prises sans que θ change, c'est-à-dire dans le plan de l'axe des z et du rayon vecteur horizontal r.

Cela posé, adoptons dans ce plan, pour nouvelles variables, au lieu de l'*ordonnée* z et du rayon vecteur horizontal r (qui est une *abscisse* perpendiculaire), le nouveau *rayon vecteur* $R=\sqrt{r^2+z^2}$ joignant l'origine au point proposé (x, y, z), et la *hauteur* (angulaire), φ, de ce point au-dessus du plan des xy, c'est-à-dire l'angle, variable entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, de ce rayon vecteur R avec sa projection horizontale r. Il viendra $r=R\cos\varphi$, $z=R\sin\varphi$, et les formules (20), appliquées à ces nouvelles données, seront

$$(24)\qquad \frac{d}{dr}=\cos\varphi\frac{d}{dR}-\frac{\sin\varphi}{R}\frac{d}{d\varphi},\qquad \frac{d}{dz}=\sin\varphi\frac{d}{dR}+\frac{\cos\varphi}{R}\frac{d}{d\varphi}.$$

Alors l'*azimut* θ, la *hauteur* φ et le *rayon vecteur* $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, reliés à x, y, z par les formules

$$x=R\cos\varphi\cos\theta,\qquad y=R\cos\varphi\sin\theta,\qquad z=R\sin\varphi,$$

constitueront ce qu'on appelle des *coordonnées polaires* ou *sphériques*. Or il est clair que, dans l'expression (23) de $\Delta_2 F$, la partie $\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{d^2F}{dz^2}$ se transformera comme avait fait précédemment la somme $\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}$, ou qu'elle deviendra $\frac{d^2F}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dF}{dR}+\frac{1}{R^2}\frac{d^2F}{d\varphi^2}$, et que, d'autre part, le terme $\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}$ ou $\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{dF}{dr}$ deviendra, d'après la première (24), $\frac{1}{R}\frac{dF}{dR}-\frac{\sin\varphi}{R^2\cos\varphi}\frac{dF}{d\varphi}$, ou $\frac{1}{R}\frac{dF}{dR}+\frac{1}{R^2\cos\varphi}\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\frac{dF}{d\varphi}$. Enfin, le dernier terme $\frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\theta^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{R^2\cos^2\varphi}\frac{d^2F}{d\theta^2}$, gardera sa forme; car prendre, comme tout à l'heure, des dérivées de F en θ sans faire changer r ni z, ou les obtenir, comme à présent, sans faire changer R ni φ, c'est identiquement la même chose. On aura donc, après deux réductions évidentes, pour répondre à la question posée, la formule

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta_2 F&=\frac{d^2F}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dF}{dR}+\frac{1}{R^2\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi\frac{dF}{d\varphi}\right)+\frac{1}{R^2\cos^2\varphi}\frac{d^2F}{d\theta^2}\\&=\frac{1}{R}\frac{d^2RF}{dR^2}+\frac{1}{R^2\cos^2\varphi}\left[\cos\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi\frac{dF}{d\varphi}\right)+\frac{d^2F}{d\theta^2}\right],\end{aligned}\right.$$

ou encore, en posant $\sigma = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ [ce qui donne

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{1}{2\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

et, par suite, $\cos\varphi\,\frac{d}{d\varphi} = \frac{d}{d\sigma}$],

$$\Delta_2 F = \frac{1}{R}\frac{d^2 RF}{dR^2} + \frac{1}{R^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d^2F}{d\sigma^2} + \frac{d^2F}{d\theta^2}\right). \tag{26}$$

Le cas le plus utile est celui où la fonction de point F, dans un espace à une, deux ou trois dimensions, dépend seulement de la distance à l'origine, que j'appellerai ici r quel que soit le nombre m (égal à 1, 2 ou 3) des coordonnées rectangles $x, y, \ldots$. On aura toujours $r = \sqrt{x^2+y^2+\ldots}$, relation qui, élevée au carré, puis différentiée complètement en x ou $y, \ldots$ et divisée par $2r$, donne

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \qquad \ldots. \tag{27}$$

Alors toute fonction F de r, devenant en $x, y, \ldots$ une fonction de fonction, aura pour dérivées partielles premières

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx} = \left(\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)x, \qquad \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dr}\frac{dr}{dy} = \left(\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)y, \quad \ldots;$$

et, vu que l'on aura, par exemple, pour toute fonction explicite de $x, y, \ldots$ et r,

$$\frac{d_r}{d(x,y,\ldots)} = \frac{dr}{d(x,y,\ldots)}\frac{d}{dr} + \frac{d}{d(x,y,\ldots)} = \frac{(x,y,\ldots)}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d}{d(x,y,\ldots)},$$

de nouvelles différentiations complètes en x ou $y, \ldots$ donneront

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{x^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}, \qquad \frac{d^2F}{dy^2} = \frac{y^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}, \qquad \ldots.$$

Enfin, le paramètre différentiel Δ_2 $\left(\text{qu'on suppose défini par } \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \ldots\right)$ de la fonction F, sera, après substitution de r^2 à $x^2+y^2+\ldots$ dans la somme et en effectuant finalement la différentiation de la quantité entre parenthèses,

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_2 F &= r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) + \frac{m}{r}\frac{dF}{dr} \\ &= \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{1}{r^{m-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{m-1}\frac{dF}{dr}\right). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

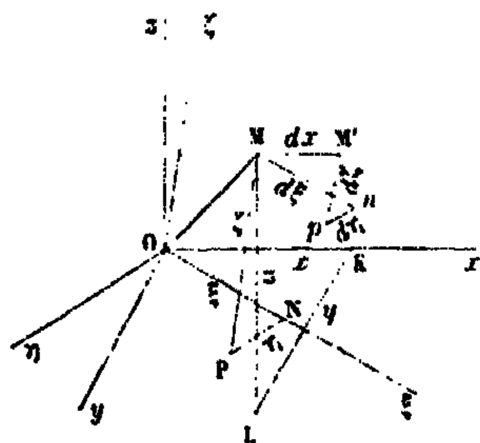
Cette expression de $\Delta_2 F$ était évidente dans le cas $m=1$, et elle se trouve, dans les deux autres cas $m=2$, $m=3$, bien d'accord avec les précédentes (21) et (25) où s'annulent maintenant les dérivées de F en θ et φ.

70*. — Des fonctions de point rapportées à divers systèmes de coordonnées rectilignes.

Les formules générales de transformation (18), pour les dérivées partielles d'une fonction u, deviennent très simples quand les variables x, y, z sont des coordonnées rectilignes, qu'on veut remplacer par d'autres également rectilignes ξ, η, ζ. On peut alors admettre que les nouveaux axes des ξ, η, ζ soient menés à partir de la même origine O que ceux des x, y, z; car, par exemple, la dérivée $\frac{du}{d\xi}$, pour un point donné $M(\xi, \eta, \zeta)$, s'obtient en marchant infiniment peu, à partir de M, le long d'un chemin où ξ croisse de $d\xi$, mais où η, ζ ne varient pas, c'est-à-dire en menant la droite infiniment petite $Mn = d\xi$ parallèle à $O\xi$ et de même sens, puis en considérant l'accroissement de la fonction le long de Mn et le divisant par $d\xi$. Cette dérivée partielle reste donc la même, en M, tant qu'on ne change pas l'*orientation* de l'axe des ξ, où que soit transportée l'origine.

Cela posé, et les origines des deux systèmes d'axes étant supposées coïncider, on sait que les coordonnées x, y, z, ou ξ, η, ζ, d'un point M, sont représentées en grandeur et en direction par les côtés, $OK = x$, $KL = y$, $LM = z$, ou $ON = \xi$, $NP = \eta$, $PM = \zeta$, de deux lignes brisées OKLM, ONPM, allant de l'origine au point M et formées de chemins parallèles aux axes respectifs des x, y, z ou des ξ, η, ζ. Et l'on sait également que, si A, B, C désignent les cosinus des angles faits par les trois axes Ox, Oy, Oz avec une droite quelconque, α, β, γ, les cosinus des angles de la même droite avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, les deux projections totales, sur cette droite quelconque, des chemins OKLM et ONPM, seront deux expressions différentes, $Ax + By + Cz$ et $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$, de la projection, sur la même droite, du rayon $OM = r$ qui joint l'origine au point M. On pourra donc poser

Fig. 15.



$$(29) \qquad Ax + By + Cz = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta;$$

et il suffira de prendre la droite sur laquelle se font les projections, perpendiculaire au plan de deux coordonnées de l'un des systèmes, au plan des yz par exemple (de manière à annuler les deux cosinus correspondants B, C), pour que cette relation (29), divisée par A, exprime la troisième coordonnée, x, de ce système, en fonction *linéaire* des coordonnées ξ, η, ζ de l'autre système. Ainsi, les équations (13) de la transformation, de même que leurs inverses donnant ξ, η, ζ en x, y, z, sont ici du premier degré, et toutes les dérivées $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)}$ se réduisent à des constantes. Alors, dans les expressions des dérivées d'ordre supérieur des fonctions de point, les coefficients des formules symboliques (18), indépendants de ξ, η, ζ, n'amènent aucun dédoublement de termes, mais passent simplement au devant ou en dehors des signes de différentiation $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}$; et la formation de ces dérivées se fait, comme on a vu plusieurs fois (pp. 112 et 70*), par le même mécanisme que la multiplication de polynômes où $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}$ désigneraient des quantités algébriques variables. Les dérivées partielles des divers ordres s'indiqueront donc par des produits symboliques, comme ceux qui expriment (p. 113) les dérivées complètes d'ordre supérieur des fonctions composées de fonctions linéaires d'une variable.

71*. — Analogie des formules de transformation pour les dérivées et pour les coordonnées, quand les axes sont rectangulaires.

Mais supposons que le nouveau système d'axes, celui des ξ, η, ζ, soit rectangulaire. Alors, pour déduire ξ, par exemple, de la formule générale (29), il faut prendre comme droite de projection une perpendiculaire au plan des $\eta\zeta$, telle que l'axe des ξ lui-même : il vient donc $\alpha = 1$, et A, B, C sont les trois cosinus des angles faits respectivement par $O\xi$ avec Ox, Oy, Oz. J'appellerai ces cosinus a, b, c, et, de même, a', b', c' les trois cosinus analogues pour $O\eta$, enfin a'', b'', c'', les trois cosinus analogues pour $O\zeta$. Une manière très simple de se rappeler ces sortes de notations est d'en former un Tableau *à double*

	x	y	z
ξ	a	b	c
η	a'	b'	c'
ζ	a''	b''	c''

entrée comme celui qu'on voit ci-dessus. On sait d'ailleurs que, par

suite de la rectangularité de $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, les trois groupes de cosinus a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' vérifient respectivement les relations

$$(30)\quad a^2+a'^2+a''^2=1,\qquad b^2+b'^2+b''^2=1,\qquad c^2+c'^2+c''^2=1;$$

ce qui ne laisse d'arbitraires que deux cosinus sur trois dans chaque groupe ou pour chacun des anciens axes Ox, Oy, Oz. Les expressions de ξ, η, ζ seront ainsi

$$(31)\quad \xi = ax+by+cz,\qquad \eta = a'x+b'y+c'z,\qquad \zeta = a''x+b''y+c''z.$$

Par suite, les dérivées constantes $\frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{d(x,y,z)}$ égalent précisément les neuf cosinus $a, a', a'', b, \ldots, c''$; et la relation (14) ou ses analogues, rendues symboliques par la suppression de la lettre u, deviennent

$$(32)\quad \frac{d}{d(x,y,z)} = (a,b,c)\frac{d}{d\xi} + (a',b',c')\frac{d}{d\eta} + (a'',b'',c'')\frac{d}{d\zeta}.$$

On aurait trouvé plus intuitivement ces formules de transformation, en cherchant, par exemple, la dérivée de la fonction de point u le long du chemin $MM' = dx$ parallèle à Ox, dérivée qui est bien ce qu'on appelle $\frac{du}{dx}$, puisque y et z ne varient pas le long de MM'. A cet effet, on mène (p. 96*), de M à M', la ligne brisée $MnpM'$, dont les côtés Mn, np, pM' sont respectivement parallèles aux axes des ξ, η, ζ. Ces côtés expriment, comme on sait, les accroissements positifs ou négatifs $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ de ξ, η, ζ le long de MM'; en sorte que la différentielle de u correspondante, qu'on peut écrire

$$\frac{du}{d\xi}d\xi + \frac{du}{d\eta}d\eta + \frac{du}{d\zeta}d\zeta,$$

donne, en divisant par dx ou MM',

$$\frac{du}{dx} = \frac{Mn}{MM'}\frac{du}{d\xi} + \frac{np}{MM'}\frac{du}{d\eta} + \frac{pM'}{MM'}\frac{du}{d\zeta}.$$

Or les trois droites Mn, np, pM' sont bien, à cause de leur rectangularité mutuelle, des projections de MM'; et leurs rapports à MM' égalent par conséquent les trois cosinus a, a', a'' de leurs angles avec cette droite.

Cela posé, observons que, si les axes rectangulaires étaient, non plus ceux des ξ, η, ζ, mais ceux des x, y, z, il faudrait, dans les formules (31), d'une part, échanger entre eux x, y, z et ξ, η, ζ, d'autre part, remplacer a, b, c par les cosinus a, a', a'' du nouvel axe rec-

tangulaire des x avec les axes des ξ, η, ζ, et, de même, a', b', c' par b, b', b''; a'', b'', c'' par c, c', c''. On aurait donc, au lieu de (31), les trois formules

$$(32\ bis)\qquad (x, y, z) = (a, b, c)\xi + (a', b', c')\eta + (a'', b'', c'')\zeta,$$

dont les coefficients respectifs seraient précisément ceux des formules symboliques (32), si les neuf cosinus $a, b, c, \ldots, c''$, astreints maintenant à vérifier, non plus les trois relations (30), mais celles-ci,

$$(33)\qquad a^2+b^2+c^2=1,\qquad a'^2+b'^2+c'^2=1,\qquad a''^2+b''^2+c''^2=1,$$

gardaient cependant les mêmes valeurs que précédemment. Or ils auront, en effet, ces mêmes valeurs dans une infinité de cas, vu que les égalités (30) et (33) prises ensemble constituent en tout cinq relations *distinctes* entre les neuf cosinus, l'une des formules (33), par exemple, s'obtenant par la soustraction de la somme des deux autres (33) d'avec la somme des trois (30). On peut donc choisir quatre des neuf cosinus, par exemple a, b, a', b', arbitrairement entre les limites où les expressions $a^2+a'^2$, $b^2+b'^2$, a^2+b^2, $a'^2+b'^2$ sont moindres que 1 [car les carrés a''^2, b''^2, c^2, c'^2, excédents de l'unité sur ces expressions, doivent être positifs] et où, de plus, la somme $a^2+b^2+a'^2+b'^2$ dépasse l'unité [pour que le carré c''^2, excédent de cette somme sur 1 en vertu de la dernière relation (30) ou (33), soit également positif] : il en résulte, comme on voit, d'après (30) et (33), des valeurs de a'', b'', c, c', c'', affectées même du double signe $\pm$, qui, jointes à celles de a, b, a', b', donnent un système de cosinus également possibles quand les axes des ξ, η, ζ sont rectangulaires ou quand ce sont ceux des x, y, z qui le deviennent. Alors, en vertu de (32) et (32 *bis*), *les dérivées des fonctions de point se transforment, si les nouveaux axes sont rectangulaires, exactement comme le font les coordonnées quand ce sont les anciens axes qui se coupent à angles droits*. Et, vu la constance, dans (32), des coefficients a, b, ... qui permet d'obtenir les dérivées d'ordre supérieur par de simples multiplications symboliques, toute combinaison linéaire à coefficients constants de dérivées quelconques en x, y, z d'une même fonction se transformera en ξ, η, ζ, ainsi qu'il arrivera évidemment pour toute combinaison entière (à coefficients encore constants) de ses dérivées premières, par le même mécanisme que le polynôme algébrique obtenu en y substituant partout, à $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ et $\frac{d}{dz}$, respectivement, x, y et z, après avoir supprimé la lettre désignant la fonction.

D'où il suit que l'expression en $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}$ transformée aura mêmes coefficients que le polynôme algébrique transformé en ξ, η, ζ, et présentera, par conséquent, les mêmes réductions que lui, ou prendra la forme la plus simple possible pour des changements d'axes impliquant de part et d'autre les mêmes valeurs des cosinus a, b, c, ..., c'', mais toujours à la multiple condition, bien entendu, que, d'abord, les relations (30) et (33) soient vérifiées, et que, de plus, les coordonnées ξ, η, ζ, ou les coordonnées x, y, z, soient rectangulaires, suivant qu'il s'agit de l'expression différentielle en $\frac{d}{d(x, y, z)}$ ou du simple polynôme en x, y, z.

Le plus important des cas considérés ici, dans lesquels les formules (32) et (32 *bis*) contiennent les neuf mêmes cosinus, est celui où l'on n'emploie que des coordonnées rectangulaires, et où, par suite, aux relations (30), conséquences de la rectangularité de $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, se joignent celles-ci,

$$(34)\quad bc+b'c'+b''c''=0,\qquad ca+c'a'+c''a''=0,\qquad ab+a'b'+a''b''=0,$$

exprimant alors la nullité des cosinus des trois angles yOz, zOx, xOy. Dans ce cas, il n'y a pas seulement identité (quant aux coefficients) des transformations effectuées par les formules (32) et de celles qui le sont par les formules (32 *bis*); mais, de plus, c'est au même espace, aux mêmes systèmes d'axes des x, y, z et des ξ, η, ζ, que ces deux sortes de transformations s'appliquent. Et, en effet, les équations (31), multipliées respectivement par a, a', a'', ou par b, b', b'', ou par c, c', c'', puis ajoutées, conduisent bien, en vertu de (30) et (34), aux valeurs (32 *bis*) de x, y, z.

Rappelons que celles-ci, transportées à leur tour dans les relations (31), et devant y satisfaire quels que soient ξ, η, ζ, donnent les formules connues, inverses de (30) et (34),

$$(35)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, & a'^2+b'^2+c'^2=1, & a''^2+b''^2+c''^2=1,\\ a'a''+b'b''+c'c''=0, & a''a+b''b+c''c=0, & aa'+bb'+cc'=0.\end{cases}$$

Supposons, par exemple, F étant une fonction donnée de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, qu'on demande ce que deviennent les deux expressions

$$(36)\qquad \Delta_1^2 F=\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}+\frac{dF^2}{dz^2},\qquad \Delta_2 F=\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2},$$

quand x, y, z sont remplacées par d'autres coordonnées ξ, η, ζ égale-

ment rectangles. Dispensons-nous d'écrire la lettre F, et ces deux expressions $\Delta_1^2 F$, $\Delta_2 F$ conduiront à la somme symbolique

$$\text{(36 bis)} \qquad \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

dont les termes signifieront, dans un cas, des produits (carrés) de dérivées premières et, dans l'autre, des dérivées secondes. D'après (32) et (32 *bis*), cette somme symbolique se transformera en $\frac{d}{d(\xi, \eta, \zeta)}$, dans les deux cas, comme le fait en ξ, η, ζ le polynôme $x^2 + y^2 + z^2$, qui, représentant le carré de la distance du point (x, y, z) à l'origine, doit évidemment devenir $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Et, en effet, les trois relations (32 *bis*) le changent en celui-ci

$$(a\xi + a'\eta + a''\zeta)^2 + (b\xi + b'\eta + b''\zeta)^2 + (c\xi + c'\eta + c''\zeta)^2$$

qui, par l'effectuation des calculs et la mise en compte des conditions (35), se réduit bien à $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Donc l'expression (36 *bis*) deviendra $\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d^2}{d\zeta^2}$; et les deux formules (36) seront alors

$$(37) \qquad \Delta_1^2 F = \frac{dF^2}{d\xi^2} + \frac{dF^2}{d\eta^2} + \frac{dF^2}{d\zeta^2}, \qquad \Delta_2 F = \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{d^2 F}{d\eta^2} + \frac{d^2 F}{d\zeta^2}.$$

On pouvait, du reste, le prévoir en se souvenant que les expressions de $\Delta_1^2 F$ et de $\Delta_2 F$ ont, en chaque point de l'espace, une valeur dépendant non des axes choisis, mais uniquement de la manière dont varie la fonction F dans le voisinage.

72*. — De l'utilité de cette analogie pour simplifier l'équation de certains phénomènes naturels.

Voici un autre exemple, propre à montrer combien peut être précieuse l'analogie des formules (32) et (32 *bis*), qui en entraîne une semblable entre les transformées de polynômes algébriques en x, y, z et de polynômes symboliques en $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$.

Soit le sextinôme, à coefficients constants,

$$(38) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy,$$

qui, égalé, par exemple, à 1, représenterait en coordonnées rectangles x, y, z une surface du second degré rapportée à son centre. On sait qu'il existe toujours un système d'axes rectangulaires des ξ, η, ζ, tel, que ce sextinôme, exprimé en fonction de ξ, η, ζ, se réduit à un tri-

nôme de la forme $A_1\xi^2 + B_1\eta^2 + C_1\zeta^2$, ou ne contient les produits $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ qu'affectés de coefficients nuls : c'est le système formé par les trois *axes* de la surface, intersections de ses trois *plans* diamétraux *principaux* ou de symétrie. Donc le même changement de coordonnées, appliqué à l'expression

$$(39)\quad A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{d^2u}{dy^2} + C\frac{d^2u}{dz^2} + 2D\frac{d^2u}{dy\,dz} + 2E\frac{d^2u}{dz\,dx} + 2F\frac{d^2u}{dx\,dy},$$

qui contient les six dérivées secondes d'une fonction de point u, transformera cette expression en celle-ci

$$(40)\qquad A_1\frac{d^2u}{d\xi^2} + B_1\frac{d^2u}{d\eta^2} + C_1\frac{d^2u}{d\zeta^2}$$

et la fera dépendre seulement des trois dérivées secondes *directes* de la fonction par rapport aux nouvelles coordonnées.

On pourra la simplifier encore. Admettons, pour fixer les idées, que les coefficients A_1, B_1, C_1 soient positifs ou égalent les carrés α^2, β^2, γ^2 de trois quantités données α, β, γ. On imaginera, à côté de l'espace (ou du corps) dans lequel existe la fonction u, un second espace, rapporté à un système quelconque d'axes rectangulaires des X, Y, Z, et l'on supposera reproduite, dans ce nouvel espace, la fonction u, mais de manière que sa valeur existant au point (ξ, η, ζ) du premier espace se trouve, dans le second, au point dont les coordonnées X, Y, Z ont les valeurs

$$(41)\qquad X = \frac{\xi}{\alpha},\qquad Y = \frac{\eta}{\beta},\qquad Z = \frac{\zeta}{\gamma}.$$

u, fonction de ξ, η, ζ, le deviendra de X, Y, Z, et ses anciennes dérivées en ξ, η, ζ se transformeront évidemment, d'après (41), par les formules

$$(42)\qquad \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dX},\qquad \frac{d}{d\eta} = \frac{1}{\beta}\frac{d}{dY},\qquad \frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dZ}.$$

Donc l'expression (40), $\alpha^2\dfrac{d^2u}{d\xi^2} + \beta^2\dfrac{d^2u}{d\eta^2} + \gamma^2\dfrac{d^2u}{d\zeta^2}$, deviendra

$$(43)\qquad \frac{d^2u}{dX^2} + \frac{d^2u}{dY^2} + \frac{d^2u}{dZ^2},$$

ou ne sera autre chose que le paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2 u$, dans le nouvel espace.

Si, par exemple, la fonction u dépendait non seulement de x, y, z, mais aussi du temps t, et que, en vertu d'une loi physique la concer-

nant, sa dérivée en t égalât précisément l'expression (39), on voit que cette même fonction u serait, *dans le second espace*, régie par la loi bien plus simple

$$\frac{du}{dt} = \Delta_2 u. \tag{44}$$

On aurait donc tout intérêt à étudier de préférence ses variations dans ce second espace; et l'on en déduirait aisément celles qu'elle éprouverait dans le premier.

C'est justement ce qui arrive lorsque la fonction u représente la température aux divers endroits (x, y, z) d'un corps ne s'échauffant que de proche en proche, et *homogène*, ou constitué autour de tous ses points comme il l'est autour de l'un d'eux. En général, un pareil corps est *hétérotrope*, c'est-à-dire doué de propriétés différentes suivant les diverses directions, et voilà pourquoi, par exemple, les coefficients A, B, C, A_1, B_1, C_1 (toujours positifs, d'ailleurs, par nature) sont inégaux; car les variations actuelles de u dans les sens des trois axes des x, y, z n'influent pas de la même manière sur la rapidité d'accroissement $\frac{du}{dt}$ de la température. Les changements de variables effectués ou, ce qui revient au même, la considération d'un second corps ayant ses coordonnées X, Y, Z liées à celles, ξ, η, ζ, du proposé, par les formules (41), ramèneront donc ce cas général et complexe au cas, le plus simple possible, où l'équation, devenue (44), présente la même forme par rapport à tous les systèmes d'axes rectangles, cas qui est évidemment celui d'un corps constitué de même dans toutes les directions ou, comme on dit, *isotrope*.

Des changements de variables appropriés aux questions ont donc encore plus d'importance, s'il est possible, quand il y a plusieurs variables indépendantes que lorsqu'il n'y en a qu'une, comme il arrivait dans les problèmes abordés au n° 63* (p. 81*).

73*. — Exemples, dans la théorie d'un faisceau de droites et dans celle des petites déformations des corps, de changements portant non seulement sur les variables, mais aussi sur les fonctions.

Je n'ai pas encore donné d'exemples où il y eût lieu de changer, avec les variables x, y, z, leurs fonctions. En voici un de cette espèce, obtenu en généralisant une propriété des normales à une famille de surfaces. Nous avons vu, à la fin du n° 60* (p. 73*), que si u, v, w désignaient leurs cosinus directeurs, ou les cosinus des angles faits, avec trois axes de coordonnées rectangulaires x, y, z, par la normale

menée en un point quelconque (x, y, z) à la surface passant par ce point, ces trois fonctions u, v, w de x, y, z donneraient, pour la somme de leurs trois dérivées partielles respectives en x, y, z, une expression

$$(45)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},$$

ayant sa valeur en chaque endroit indépendante des axes choisis, et dont nous avons trouvé la signification au numéro suivant 61*. Supposons ici que les droites ainsi menées à partir des divers points (x, y, z) de l'espace continuent à avoir une direction déterminée et graduellement variable d'un point à l'autre, c'est-à-dire trois cosinus directeurs u, v, w fonctions continues de x, y, z, mais sans être astreintes à aucune autre condition, comme serait celle de *normalité* à une famille de surfaces; et proposons-nous de reconnaître si la somme (45) continuera néanmoins à présenter, en un point donné (x, y, z), une valeur constante quels que soient les trois axes rectangulaires choisis, ou, ce qui revient au même, si cette somme (45) relative au système des x, y, z, évaluée dans tout autre système de coordonnées rectangles ξ, η, ζ, dont les axes feront avec la droite en question émanée de (x, y, z) ou de (ξ, η, ζ) des angles ayant certains cosinus u_1, v_1, w_1, s'exprimera simplement par

$$(46)\qquad \frac{du_1}{d\xi}+\frac{dv_1}{d\eta}+\frac{dw_1}{d\zeta}.$$

A cet effet, imaginons que l'on donne, à cette droite issue du point (x, y, z) ou (ξ, η, ζ), une longueur égale à 1, et qu'on la projette sur deux systèmes d'axes menés, à partir de (x, y, z), parallèlement à ceux des x, y, z et des ξ, η, ζ. Les coordonnées de sa seconde extrémité par rapport à ces deux systèmes spéciaux d'axes se réduiront évidemment aux cosinus, u, v, w et u_1, v_1, w_1, des angles de projection; d'où il suit que ces cosinus seront en réalité des coordonnées rectangulaires, auxquelles s'appliqueront, par exemple, les formules (32 *bis*), où x, y, z, ξ, η, ζ deviendront respectivement u, v, w, u_1, v_1, w_1. Ainsi, les anciennes fonctions u, v, w s'exprimeront, au moyen des nouvelles u_1, v_1, w_1, par les trois formules

$$(47)\qquad (u, v, w) = (a, b, c)u_1 + (a', b', c')v_1 + (a'', b'', c'')w_1.$$

Telles sont les valeurs qu'il faudra porter dans (45) au lieu de u, v, w, en même temps qu'on y substituera à $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ les seconds membres des formules symboliques toutes pareilles (32). Et l'expression

(45) deviendra

$$
(48)\quad \begin{cases} \left(a\dfrac{d}{d\xi}+a'\dfrac{d}{d\eta}+a''\dfrac{d}{d\zeta}\right)(au_1+a'v_1+a''w_1) \\ +\left(b\dfrac{d}{d\xi}+b'\dfrac{d}{d\eta}+b''\dfrac{d}{d\zeta}\right)(bu_1+b'v_1+b''w_1) \\ +\left(c\dfrac{d}{d\xi}+c'\dfrac{d}{d\eta}+c''\dfrac{d}{d\zeta}\right)(cu_1+c'v_1+c''w_1). \end{cases}
$$

Effectuons-y les différentiations indiquées, revenant à des multiplications symboliques par suite de la constance des coefficients a, a', ... et puis réduisons. La somme (48) contiendra les six expressions

$$
(49)\quad \frac{du_1}{d\xi},\quad \frac{dv_1}{d\eta},\quad \frac{dw_1}{d\zeta},\quad \frac{dv_1}{d\zeta}+\frac{dw_1}{d\eta},\quad \frac{dw_1}{d\xi}+\frac{du_1}{d\zeta},\quad \frac{du_1}{d\eta}+\frac{dv_1}{d\xi},
$$

affectées respectivement des coefficients

$$
(50)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2,\quad a'^2+b'^2+c'^2,\quad a''^2+b''^2+c''^2, \\ a'a''+b'b''+c'c'',\quad a''a+b''b+c''c,\quad aa'+bb'+cc', \end{cases}
$$

dont les trois premiers ont la valeur 1 et, les trois derniers, la valeur zéro, en vertu des relations (35). Donc l'expression (45) se réduit à (46), ou conserve bien sa forme dans tous les systèmes de coordonnées rectilignes rectangulaires.

Il est clair que la démonstration précédente subsiste quand on y regarde u, v, w et u_1, v_1, w_1 comme les projections, sur les anciens et les nouveaux axes, de droites ayant non seulement leur direction, mais même leur longueur, arbitrairement variables en fonction des coordonnées x, y, z ou ξ, η, ζ de leur point de départ; car nous n'avons eu ni dans les formules de transformation (47) et (32), ni dans les réductions opérées sur l'expression (48), à supposer que cette longueur $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ fût égale à l'unité. On peut donc admettre, par exemple, que les droites en question représentent des déplacements quelconques, éprouvés, à partir d'un état primitif ou censé tel, par les diverses particules de matière composant un corps que l'on a déformé : alors x, y, z ou ξ, η, ζ sont les *coordonnées primitives* des divers points du corps, et u, v, w ou u_1, v_1, w_1, qui, ajoutés à x, y, z ou à ξ, η, ζ, donnent leurs *coordonnées actuelles*, s'appellent leurs *déplacements dans les sens des axes*, ou les *composantes*, suivant ces axes, de leurs *déplacements effectifs* $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$. Les six expressions

$$
(51)\quad \frac{du}{dx},\quad \frac{dv}{dy},\quad \frac{dw}{dz},\quad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}
$$

sont spécialement utiles à considérer, parce que, du moins dans le cas de déplacements très petits, elles définissent complètement la déformation éprouvée par la particule qui comprend, dans sa situation primitive, le point (x, y, z), et qu'on peut appeler, par abréviation, la *particule* (x, y, z). Les trois premières, qu'on exprime souvent, sous une forme plus concise, par $\partial_x, \partial_y, \partial_z$, sont dites les *dilatations* de la particule (ou *dilatations linéaires*) suivant les axes respectifs des x, y, z; et leur somme (45), indépendante des axes choisis, s'appelle la *dilatation cubique* de la particule. Quant aux trois dernières (51), qu'on désigne souvent, pour abréger, par g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, elles sont dites les trois *glissements* de la particule relatifs aux axes des x, y, z. Jointes aux trois dilatations $\partial_x, \partial_y, \partial_z$, elles constituent ce qu'on appelle ses six *déformations élémentaires* dans le système des coordonnées x, y, z. Je ne pourrais, sans trop sortir du cadre de ce Cours, expliquer ces diverses dénominations [1].

---

[1] Il me paraît cependant utile de montrer en quelques mots que les six expressions (51) caractérisent bien la déformation de la particule (x, y, z) du corps. Les circonstances de forme de celle-ci dépendent évidemment des distances mutuelles de ses divers points *matériels*, et seront, par conséquent, déterminées, si l'on sait de combien y a crû la distance de deux points quelconques, définis par leurs coordonnées primitives. Admettons que la droite joignant le premier de ces points au second, droite qu'on peut se représenter comme un élément de *fibre* du corps, eût, dans l'état primitif, une longueur donnée ds, et trois cosinus directeurs également donnés a, b, c, ou que, par conséquent, les coordonnées primitives du second point dépassassent celles du premier des trois quantités $dx = a\,ds$, $dy = b\,ds$, $dz = c\,ds$. Les déplacements u, v, w, fonction des coordonnées primitives x, y, z, survenant ensuite, seront évidemment, pour le second point, plus grands que pour le premier de leurs différentielles le long de ds,

$$(du, dv, dw) = \frac{d(u, v, w)}{dx}\,dx + \frac{d(u, v, w)}{dy}\,dy + \frac{d(u, v, w)}{dz}\,dz$$
$$= ds\left(a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy} + c\frac{d}{dz}\right)(u, v, w),$$

expressions dans lesquelles le peu d'étendue de la particule permet de prendre les dérivées de u, v, w, d'où que parte l'élément ds, pour les mêmes valeurs x, y, z des variables. Et l'écart ou l'espacement des deux points matériels deviendra, suivant les trois axes, $dx + du$, $dy + dv$, $dz + dw$, vu qu'il croîtra respectivement des différences des déplacements éprouvés suivant les mêmes axes par les deux points. On suppose, d'ailleurs, ces différences du, dv, dw très petites en comparaison des valeurs primitives dx, dy, dz des trois projections de l'écart, car c'est justement en cela que consiste l'hypothèse de la petitesse des déplacements. Le carré de la distance des deux points, qui était d'abord $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ou ds^2, sera donc

$$(dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2.$$

On voit, en développant, puis négligeant les termes du^2, dv^2, dw^2, dont l'ordre

Observons seulement que les formules (47) et (32) donnent, pour les transformées de ces expressions (51) dans un nouveau système de coordonnées ξ, η, ζ.

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \left(a\dfrac{d}{d\xi} + a'\dfrac{d}{d\eta} + a''\dfrac{d}{d\zeta}\right)(au_1 + a'v_1 + a''w_1), \qquad \dfrac{dv}{dy} = \text{etc.} \\ \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy} = \left(c\dfrac{d}{d\xi} + c'\dfrac{d}{d\eta} + c''\dfrac{d}{d\zeta}\right)(bu_1 + b'v_1 + b''w_1) \\ \qquad\qquad + \left(b\dfrac{d}{d\xi} + b'\dfrac{d}{d\eta} + b''\dfrac{d}{d\zeta}\right)(cu_1 + c'v_1 + c''w_1), \text{ etc.} \end{cases}$$

En développpant celles-ci comme il a été fait pour (48), on reconnait que u_1, v_1, w_1 n'y *figurent* que par les six expressions (49), lesquelles jouent, dans le nouveau système d'axes, le même rôle que les proposées (51) dans le premier. C'est ce qu'on aurait pu prévoir. En effet, si les fonctions u_1, v_1, w_1 de ξ, η, ζ viennent à changer, mais de telle manière que les six expressions (49), caractéristiques du mode de déformation subi par une particule déterminée (ξ, η, ζ), restent les mêmes, les six expressions (51), qui le définissent avec non moins de précision dans le premier système d'axes, ne changeront pas davantage, quelles que soient les variations éprouvées individuellement, dans ces conditions, par les dérivées comme $\dfrac{dv_1}{d\zeta}$, $\dfrac{dw_1}{d\eta}$, ... Donc celles-ci ne peuvent entrer dans les seconds membres de (52) que par leurs trois sommes respectives $g_{\eta\zeta}$, $g_{\zeta\xi}$, $g_{\xi\eta}$.

---

de petitesse est le plus élevé, et employant enfin les notations abrégées ∂, g après substitution à *du*, *dv*, *dw* de leurs valeurs ci-dessus, que ce carré de la distance aura *grandi* de

$$\begin{aligned} 2(dx\,du + dy\,dv + dz\,dw) &= 2ds(a\,du + b\,dv + c\,dw) \\ &= 2ds^2(\partial_x a^2 + \partial_y b^2 + \partial_z c^2 + g_{yz}bc + g_{zx}ca + g_{xy}ab). \end{aligned}$$

Or, si l'on appelle ∂_s la *dilatation linéaire* de la fibre considérée *ds*, c'est-à-dire son allongement *par unité de longueur* ou le très petit rapport de son allongement effectif à sa longueur primitive *ds*, cet allongement effectif sera le produit $ds\partial_s$, et la distance des deux points après la déformation, devenue $ds(1 + \partial_s)$, aura pour carré $ds^2(1 + 2\partial_s)$, sauf *encore*, dans la parenthèse, un terme ∂_s^2, d'un ordre de petitesse supérieur. L'accroissement du carré de la distance étant ainsi $2ds^2\partial_s$, la comparaison de cette expression à la précédente donne

$$(51\ bis)\qquad \partial_s = \partial_x a^2 + \partial_y b^2 + \partial_z c^2 + g_{yz}bc + g_{zx}ca + g_{xy}ab;$$

ce qui montre bien que les nouvelles longueurs de toutes les droites joignant deux à deux les points de la particule et, par suite, toutes les circonstances de sa forme, ne dépendent des petits déplacements u, v, w éprouvés que par les six quantités ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}.

71*. — Changements infiniment petits d'axes coordonnés rectangles : leur réduction à trois rotations élémentaires.

Quand les nouveaux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ diffèrent respectivement très peu des anciens Ox, Oy, Oz, les trois cosinus a, b', c'' sont ceux des petits angles ξOx, ηOy, ζOz, et l'on voit, en les exprimant, d'après une formule connue, en fonction des sinus des arcs moitiés $\Big[$ce qui les change en $1 - 2\sin^2\frac{\xi Ox}{2}, \ldots$ ou, sensiblement, en $1 - \frac{(\xi Ox)^2}{2}, \ldots\Big]$, qu'ils peuvent être réduits à l'unité, à des erreurs près du second ordre de petitesse, c'est-à-dire de l'ordre des carrés de $\sin\xi Ox$, $\sin\eta Oy$, $\sin\zeta Oz$. Quant aux angles que font $O\xi$ avec Oy et Oz, ou $O\eta$ avec Oz et Ox, ou $O\zeta$ avec Ox et Oy, il y a avantage à introduire à leur place, dans les formules, leurs projections sur les plans respectifs des xy et des zx, ou des yz et des xy, ou des zx et des yz, en même temps qu'on projettera également sur les plans respectifs des yz, des zx ou des xy les trois angles $\eta O\zeta$, $\zeta O\xi$, $\xi O\eta$. Toutes ces projections d'angles sur des plans n'ayant par rapport aux leurs que des inclinaisons très petites du premier ordre se feront, à fort peu près, *en vraie grandeur*, ou donneront, sur les plans de projection, de nouveaux angles ne présentant avec les proposés que des différences du second ordre de petitesse [1];

---

[1] On reconnaît qu'un angle se projette en vraie grandeur, sauf erreur relative du second ordre de petitesse, sur un plan n'ayant par rapport au sien qu'une inclinaison très petite du premier ordre, en construisant sur cet angle un triangle dont il occupe un sommet, et qui, en projection sur le second plan (supposé horizontal pour fixer les idées), aura ses côtés multipliés par les cosinus des angles, du premier ordre de petitesse, marquant leurs pentes respectives, cosinus inférieurs à l'unité de quantités du second ordre de petitesse seulement; en sorte que les rapports respectifs des trois côtés et aussi, par suite, les angles, peuvent être censés rester les mêmes, quand on passe du triangle à sa projection. Mais cette idée mérite quelques développements, ne serait-ce que pour permettre d'apprécier les petits écarts du second ordre existant entre l'angle proposé et sa projection.

Pour traiter cette question dans toute sa généralité, proposons-nous donc d'évaluer l'angle V de deux droites OM, ON, en fonction de sa projection mOn ou v sur un plan horizontal, et aussi des angles faits avec ce plan par certaines droites tracées sur le sien, notamment, des deux, $mOM = \alpha$ et $nON = \beta$, qui marquent les pentes de ses deux côtés, angles, dont α désignera le plus grand, comptés tous les deux positivement, ou l'un, α, positivement et l'autre, β, négativement, suivant qu'ils seront ou ne seront pas d'un même côté par rapport au plan de projection mOn mené à partir du sommet O de l'angle V

de sorte que, à part encore des différences de cet ordre, on pourra

---

proposé. Prenons égales à 1 les deux projections Om, On de OM et de ON. Cela donne

$$mM = \tang \alpha, \quad nN = \tang \beta.$$

$$OM = \operatorname{séc} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad ON = \operatorname{séc} \beta = \frac{1}{\cos \beta},$$

Fig. 16.



et aussi, vu que la corde mn est le double du sinus de la moitié de son arc v,

$$mn = \sqrt{4 \sin^2 \frac{v}{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos v}.$$

Il reste à évaluer MN. Or, dans le plan vertical $MmnN$, MN est évidemment l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant un côté de l'angle droit égal et parallèle à mn, pour angle aigu adjacent (en N) un angle égal à celui I, ou mIM, qui mesure la pente de MN, enfin le troisième côté exprimé par la différence algébrique $mM - nN = \tang \alpha - \tang \beta$. On a donc à volonté, suivant qu'on introduit ou qu'on évite I :

1° Soit

$$MN = \frac{mn}{\cos I} = \frac{2 \sin \frac{v}{2}}{\cos I},$$

avec la relation

$$mn \quad \text{ou} \quad 2 \sin \frac{v}{2} = \frac{mM - nN}{\tang I} = \frac{\tang \alpha - \tang \beta}{\tang I} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin I} \frac{\cos I}{\cos \alpha \cos \beta},$$

qui transforme la valeur de MN, élevée au carré, en celle-ci

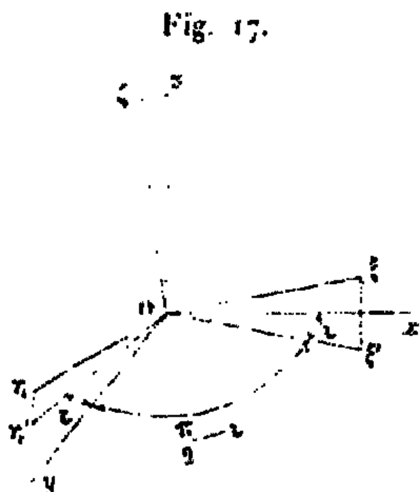
$$\overline{MN}^2 = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 I \cos^2 \alpha \cos^2 \beta};$$

2° Soit, successivement,

$$\overline{MN}^2 = (mM - nN)^2 + \overline{mn}^2 = \overline{mM}^2 + \overline{nN}^2 + \overline{mn}^2 - 2mM.nN$$
$$= \overline{mM}^2 + \overline{nN}^2 + 2 - 2 \cos v - 2 \tang \alpha \tang \beta.$$

confondre les proposés avec leurs projections et regarder, par exemple, comme perpendiculaires l'une à l'autre, les deux projections de $O\xi$ et $O\eta$ sur le plan xOy, projections que j'appellerai $O\xi'$ et $O\eta'$. Or, si l'on désigne par ε le très petit angle, compté positivement en tournant dans le sens de Ox vers Oy, que fait $O\xi'$ avec Ox, l'angle $\xi'Oy$ et, par suite, l'angle projeté correspondant ξOy en seront évidemment le complément. Donc le cosinus, b, de ξOy aura pour valeur, toujours sauf erreur du second ordre, $\sin \xi' Ox$ ou ε; et, d'autre part, l'angle $\eta' Ox$, égal à *un droit* plus ε, aura son cosinus, qui revient à celui, a', de ηOx, égal à $-\sin\varepsilon$ ou à $-\varepsilon$. En appelant de même ρ l'angle que fera

Fig. 17.



Substituons d'abord l'une, et ensuite l'autre de ces deux expressions de $\overline{MN}^2$ dans la valeur de $\cos V$ fournie par le triangle MON,

$$\cos V = \frac{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - \overline{MN}^2}{2}\,\frac{1}{OM.ON},$$

puis remplaçons, dans le premier résultat, OM, ON par les inverses de $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et, dans le second, $\overline{OM}^2 - \overline{mM}^2$ par $\overline{Om}^2$ ou 1, $\overline{ON}^2 - \overline{nN}^2$ par $\overline{On}^2$ ou 1, et l'inverse de OM.ON par $\cos\alpha\cos\beta$. Enfin, portons la première valeur ainsi trouvée de $\cos V$ dans l'expression, $2 - 2\cos V$, de $4\sin^2\frac{V}{2}$, que nous diviserons ensuite, après réduction de trois termes à $-\sin^2 I(\cos\alpha - \cos\beta)^2$, par l'expression, $\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2 I}\,\frac{\cos^2 I}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$, de $\left(2\sin\frac{v}{2}\right)^2$, déduite de la formule obtenue ci-dessus pour mn ou $2\sin\frac{v}{2}$. Il viendra les deux relations, dont la seconde est bien connue (car c'est au fond la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique),

$$\text{(A)}\qquad \frac{\sin^2\frac{V}{2}}{\sin^2\frac{v}{2}} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2 I}\left\{1 - \left[\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\sin I\right]^2\right\},$$

$$\text{(B)}\qquad \cos V = \cos v\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

La première est préférable pour l'étude du rapport $\frac{V}{v}$. En effet, v et V ont à varier seulement depuis zéro jusqu'à une valeur inférieure à leur limite π (vu que, dès que v et V dépassent chacun un angle droit, on peut, à leur place, considérer leurs suppléments aigus, dont l'un, $\pi - v$, est la projection de l'autre $\pi - V$). Or, dans ces limites, $\frac{v}{2}$, $\frac{V}{2}$ n'atteignent pas 1 droit, et les variations de

avec Oy, dans le sens de Oy vers Oz, la projection de $O\eta$ sur le plan des yz, on verra pareillement que $c' = \mathfrak{p}$ et que $b'' = -\mathfrak{p}$. Enfin, appelant $\mathfrak{q}$ l'angle fait avec Oz, dans le sens de Oz vers Ox, par la projection de $O\zeta$ sur le plan des zx, on aura $a'' = \mathfrak{q}$, $c = -\mathfrak{q}$. Et il viendra en définitive, sauf erreurs de l'ordre des carrés et produits de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$,

$$(53)\qquad \begin{cases} a = 1, & b = \mathfrak{r}, & c = -\mathfrak{q}; \\ a' = -\mathfrak{r}, & b' = 1, & c' = \mathfrak{p}; \\ a'' = \mathfrak{q}, & b'' = -\mathfrak{p}, & c'' = 1. \end{cases}$$

Or observons que, si l'on faisait tourner d'un très petit angle quelconque ω, autour de l'axe des z, l'ensemble, supposé rigide et lié à

---

leurs sinus sont *partout comparables* aux leurs; ce qui va nous permettre de conclure des sinus aux angles, tandis que, si nous nous servions de la formule (B), nous ne pourrions pas, pour les petites valeurs de v ou de V, conclure de même des cosinus aux angles.

Appliquons donc la formule (A) au cas où le plan de projection mOn fait, avec le plan de l'angle proposé MON, un angle très petit, dont la tangente (qu'on appelle *l'inclinaison* mutuelle des deux plans) puisse être regardée comme une quantité du premier ordre de petitesse. Alors α, β, I, angles mesurant les pentes de droites tracées sur le plan MON, sont au moins aussi petits ou du même ordre et l'on a sensiblement

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},\quad \cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2},\quad \cos I = 1 - \frac{I^2}{2},\quad \sin(\alpha - \beta) = \alpha - \beta,\quad \sin I = I.$$

Dans le second membre de (A) le facteur entre crochets vaut donc, à fort peu près,

$$1 - \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha - \beta}\,\frac{I}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\,I\right)^2;$$

et il n'est inférieur à l'unité que d'une quantité du quatrième ordre de petitesse. Donc, sauf erreur de cet ordre, le second membre de (A) peut se réduire à l'autre facteur $\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2 I}$, qui ne diffère évidemment de l'unité, comme $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos I$, que par des quantités du deuxième ordre de petitesse; et il en est, par suite, à plus forte raison, de même de sa racine carrée $\frac{\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}{\cos I}$, qu'on reconnaît, du reste, aisément, valoir à fort peu près $1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2I^2}{4}$. Ainsi, le rapport des deux sinus de $\frac{V}{2}$ et de $\frac{v}{2}$ égale l'unité, et aussi, par conséquent, celui, $\frac{V}{v}$, des deux angles correspondants, à des erreurs près comparables au carré de l'inclinaison des deux plans. C'est bien dire que, *tout angle peut être censé se projeter en vraie grandeur sur un plan autre que le sien, quand on regarde comme négligeable le produit de sa valeur par le carré de l'inclinaison de son plan sur le plan de projection.*

Oz, des axes des ξ, η, ζ, le plan $zO\xi\xi'$ et le plan $zO\eta\eta'$ décriraient cet angle ω en s'éloignant du plan fixe zOx (pour ω positif), et que l'angle ι augmenterait de ω. Quant aux angles $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, ils resteraient les mêmes, aux quantités près du second ordre que l'on néglige : car le plan $zO\zeta$ tournerait du même angle ω, et un point, ζ, de $O\zeta$, situé à la distance 1 de l'origine ou, par conséquent, à la distance $\zeta z = \sin \zeta Oz$ de l'axe de rotation Oz, se déplacerait seulement de la quantité du second ordre $\omega \sin \zeta Oz$; ce qui, changeant seulement de cet arc $\omega \sin \zeta Oz$ l'orientation de $O\zeta$ dans l'espace, ne pourrait faire varier les angles ζOx, ζOy que de quantités encore moindres, et apporter ainsi aux cosinus correspondants $a'' = \mathfrak{p}$, $b'' = -\mathfrak{q}$ que des modifications du même ordre.

Il en serait évidemment de même, quant aux cosinus $a'' = \mathfrak{q}$, $b'' = -\mathfrak{p}$, si la rotation ω se faisait non pas autour de Oz, mais autour de toute autre droite également très voisine de $O\zeta$; et comme alors, vu la rotation de $O\xi$ et la fixité de Oy, la projection, effectuée à fort peu près en vraie grandeur, de l'angle presque droit ξOy sur un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation, diminuerait de ω, il est clair que le cosinus de cette projection, et le cosinus à fort peu près égal de ξOy augmenteraient encore de ω, tout comme si la rotation s'était faite autour de Oz.

Des raisonnements analogues montreraient qu'une seconde rotation, exprimée par un très petit angle donné, de l'ensemble des nouveaux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ autour de l'axe des x ou d'un autre très peu différent, ferait augmenter $\mathfrak{p}$ de la valeur même de cet angle donné, en laissant invariables $\mathfrak{q}$, ι; et que, enfin, une troisième rotation, d'une autre valeur donnée très petite, autour de l'axe des y ou d'un autre fort voisin, dans le sens de Oz vers Ox, accroîtrait $\mathfrak{q}$ de cette valeur sans faire varier ι et $\mathfrak{p}$.

Donc, si l'on admet que les axes des ξ, η, ζ coïncidaient primitivement avec Ox, Oy, Oz, mais qu'on leur ait imprimé des rotations successives, égales respectivement à $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, ι, autour de ces derniers Ox, Oy, Oz, ou autour d'autres très peu différents, comme sont, par exemple, à chaque instant, ceux des ξ, η, ζ dans leurs positions actuelles, les nouveaux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ se trouveront avoir acquis de la sorte leurs vrais cosinus directeurs (53), et être venus, par conséquent, à des écarts près du second ordre de petitesse, dans leurs positions effectives, que définissent parfaitement les petits angles $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, ι permettant de construire, pour chacun, ses deux projections sur les deux plans coordonnés primitifs dont l'ancien axe voisin Ox, Oy ou Oz est l'intersection.

Et l'on peut conclure de là que *tout déplacement élémentaire, autour de l'origine, d'un système d'axes coordonnés rectangles, équivaut à trois rotations infiniment petites, effectuées successivement autour de chacun d'eux par l'ensemble des deux autres.*

75*. — Des effets que produisent ces changements sur les expressions dépendant de fonctions de point ou de leurs dérivées partielles prises dans les sens des axes.

Ainsi, les transformations infiniment petites, de coordonnées rectangles, en d'autres qui le soient également, se ramènent au cas d'une rotation élémentaire effectuée, par exemple, autour de l'axe Oz ou Oζ, par l'ensemble des deux autres, qu'on appelle Ox et Oy dans leurs premières positions, Oξ et Oη dans les secondes. Alors, si l'on suppose que la rotation ι actuellement effectuée vienne à la suite d'une infinité d'autres analogues, ayant déjà fait tourner en tout Ox et Oy d'un angle fini θ autour de Oz, il sera naturel de regarder ι comme la différentielle $d\theta$ de cet angle; et il faudra, dans les formules (53), réduire ρ et q à zéro, mais ι à $d\theta$. Les formules (32) [p. 98*], en y laissant subsister ι, deviendront

$$(54)\qquad \frac{d}{dx}=\frac{d}{d\xi}-\iota\frac{d}{d\eta},\qquad \frac{d}{dy}=\frac{d}{d\eta}+\iota\frac{d}{d\xi},\qquad \frac{d}{dz}=\frac{d}{d\zeta};$$

et, si les fonctions de x, y, z que l'on étudie doivent elles-mêmes être échangées contre d'autres quand la direction des axes varie, si ce sont, par exemple, les composantes u, v, w des petits déplacements éprouvés par les divers points d'un corps que l'on déforme, les relations (47) donneront en même temps

$$(55)\qquad u=u_1-\iota v_1,\qquad v=v_1+\iota u_1,\qquad w=w_1.$$

Il en résulte que les diverses expressions formées avec les dérivées de telles fonctions, comme, par exemple, les six déformations élémentaires (51) [p. 105*], seront toujours linéaires en ι; car on pourra, dans leurs développements par les formules (54) et (55), négliger encore les termes du second ordre de petitesse où figurerait le carré ι^2. C'est ainsi que l'on aura

$$(56)\quad \frac{du}{dx}=\left(\frac{d}{d\xi}-\iota\frac{d}{d\eta}\right)(u_1-\iota v_1)=\frac{du_1}{d\xi}-\iota\left(\frac{du_1}{d\eta}+\frac{dv_1}{d\xi}\right),\quad \frac{dv}{dy}=\ \text{etc.},$$

ou bien, avec les notations abrégées ∂, g des dilatations et des

glissements,

$$(57)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \partial_x = \partial_\xi - \iota g_{\xi\eta}, & \partial_y = \partial_\eta + \iota g_{\xi\eta}, & \partial_z = \partial_\zeta, \\ g_{yz} = g_{\eta\zeta} + \iota g_{\zeta\xi}, & g_{zx} = g_{\zeta\xi} - \iota g_{\eta\zeta}, & g_{xy} = g_{\xi\eta} + 2\iota(\partial_\xi - \partial_\eta). \end{array} \right.$$

Les seconds membres de ces formules donnent les nouvelles expressions que prennent, en chaque point de l'espace, les valeurs des premiers membres, par l'effet de la rotation élémentaire ι ou $d\theta$ des axes des x et des y autour de l'axe des z. Si l'on convient d'appeler x, y, z les coordonnées après leur transformation infinitésimale, comme avant, et, de même, u, v, w, ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, etc., leurs fonctions que l'on a en vue, le premier terme de chaque second membre (auquel celui-ci se réduirait pour $\iota = 0$) aura même expression que le premier membre, et le terme suivant, affecté du coefficient ι ou $d\theta$, sera, par suite, ce que la rotation élémentaire $d\theta$ aura ajouté à cette expression pour lui conserver, après le changement d'axes, sa valeur primitive.

Or, supposons, par exemple, que l'on doive considérer spécialement une fonction entière donnée des quantités ∂, g. Dans cette fonction, l'ensemble des termes d'un certain degré, si on le suppose complet, ou affecté d'autant de coefficients distincts qu'il y a de termes possibles de ce degré, conservera sa forme dans tous les changements d'axes rectangulaires; car les formules (52) [p. 107*] montrent que les anciennes fonctions ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, exprimées au moyen des nouvelles, ne comprennent que des termes du premier degré par rapport à celles-ci, et ne donnent, par suite, multipliées ensemble, que des termes dont le degré contient autant d'unités que l'on combine de facteurs. Mais les coefficients des divers termes varieront et seront, en particulier, fonction de θ, si l'on se borne à opérer des rotations autour de l'axe des z. En substituant dans la fonction proposée, à

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad \partial_z,\quad g_{yz},\quad g_{zx},\quad g_{xy},$$

leurs expressions (57), c'est-à-dire, vu la conservation des notations, les sommes respectives

$$(58)\quad \partial_x - \iota g_{xy},\quad \partial_y + \iota g_{xy},\quad \partial_z,\quad g_{yz} + \iota g_{zx},\quad g_{zx} - \iota g_{yz},\quad g_{xy} + 2\iota(\partial_x - \partial_y),$$

puis effectuant les multiplications indiquées de ces expressions les unes par les autres jusqu'aux termes du premier degré en ι inclusivement, ainsi que celles de leurs produits par les valeurs *actuelles* (c'est-à-dire antérieures à la rotation $d\theta$) des coefficients, et groupant enfin les termes semblables en ∂_x, ∂_y, ..., g_{xy}, l'excédent (où

figurera $d\theta$ ... en facteur) de chacun des nouveaux coefficients, ainsi obtenus, sur le coefficient analogue antérieur à la rotation $d\theta$, sera évidemment la différentielle de ce coefficient par rapport à θ, et, divisé par ε, donnera sa dérivée $\frac{d}{d\theta}$. Les dérivées, par rapport à θ, des coefficients considérés, égaleront ainsi des fonctions connues, linéaires et, par conséquent très simples, des valeurs actuelles des coefficients eux-mêmes. Les relations exprimant cette égalité seront ce qu'on appelle des *équations différentielles linéaires :* nous verrons vers la fin du Cours qu'elles suffisent pour déterminer complètement les variations, en fonction de θ, des quantités dont elles donnent les dérivées, c'est-à-dire, ici, des coefficients de la fonction entière que l'on étudie; en sorte qu'elles constitueront comme l'expression même, ou la forme la plus simple possible, des lois régissant la variation des coefficients dont il s'agit.

Et l'on étendra aisément ces lois, sauf à effectuer dans les notations les changements convenables, au cas d'un déplacement quelconque des axes autour de l'origine; car, le nouveau plan des xy coupant toujours l'ancien suivant une certaine droite tirée à partir de cette origine, on pourra d'abord, par une rotation finie autour de l'ancien axe des z, amener l'axe primitif des x, ou celui des y, en coïncidence avec cette droite; puis effectuer une seconde rotation, mais autour de l'axe actuel des x ou des y, c'est-à-dire autour de cette même droite, jusqu'à ce que le plan des xy et, par suite, l'axe des z viennent occuper leurs situations définitives, et opérer enfin une troisième rotation autour du nouvel axe des z, pour faire arriver également les deux autres axes dans leurs positions finales.

76*. — Application à l'isotropie des corps.

La théorie précédente s'applique surtout à l'étude des corps *isotropes.* On appelle ainsi ceux dont les propriétés, relatives aux lois qu'y suivent les phénomènes dans une étendue infiniment petite autour d'un point quelconque (x, y, z), s'expriment de la même manière, c'est-à-dire au moyen de formules pareilles et contenant les mêmes *constantes physiques,* quel que soit le système des coordonnées choisies, parmi ceux que l'on obtient en faisant tourner arbitrairement autour de l'origine l'ensemble de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

En général, les fonctions, toujours entières, représentant ces pro-

priétés physiques d'un corps, fonctions souvent liées au système des coordonnées [c'est-à-dire ayant des valeurs différentes dans différents systèmes [1]] et dont les variables sont des quantités du genre des déformations ∂, g, peuvent se transformer de deux manières bien distinctes quand, après avoir fait tourner infiniment peu les deux axes Ox et Oy, par exemple, autour du troisième Oz, on exprime leurs valeurs au moyen des nouvelles variables, ou variables relatives aux nouveaux axes. D'une part, on peut y substituer directement aux anciennes variables leurs valeurs en fonction des nouvelles, données par des relations comme (57); et l'on obtient ainsi, sous une première forme transformée, les anciennes fonctions. D'autre part, avec l'aide de principes spéciaux à chaque branche de science, on exprime linéairement ces fonctions considérées, correspondant aux premiers axes, au moyen des fonctions analogues correspondant aux nouveaux axes; et, alors, chacune des anciennes fonctions est remplacée par la nouvelle de même espèce, plus une différence infiniment petite ayant dans tous ses termes le facteur ι ou $d\theta$, et où l'on peut ainsi, sauf erreur négligeable de l'ordre de ι^2, substituer aux nouvelles fonctions les anciennes exprimées d'ailleurs, comme il vient d'être dit, au moyen des nouvelles variables. En comparant enfin ou égalant les deux formules ainsi trouvées pour chacune des anciennes fonctions, formules dont la deuxième a comme terme principal la nouvelle fonction correspondante, il suffira d'isoler ce principal terme pour en avoir la valeur explicite dans le nouveau système d'axes et reconnaître le petit excédent, où ι figure en facteur, de ses coefficients sur les coefficients analogues de la première fonction. Or ces excédents divisés par ι,

---

(1) Par exemple, dans l'hydrodynamique des fluides à frottements, ces fonctions sont les composantes suivant les axes (réductibles de neuf à six par l'égalité deux à deux de celles qui sont tangentielles) des pressions exercées sur l'unité d'aire de trois éléments plans de surface menés normalement aux axes par le point quelconque (x, y, z); composantes dont dépendent les pressions que supportent tous les autres éléments superficiels se croisant au même point. *Dans la théorie de* l'élasticité, ce sont encore six composantes analogues (*forces élastiques*); mais, comme elles se déduisent alors simplement d'une fonction unique, dite *potentiel d'élasticité*, indépendante des axes choisis, il est plus simple de tout ramener à celle-ci, que l'on n'a pas à changer. Dans la théorie analytique de la chaleur, ce sont les trois *flux* de chaleur qui, par unités d'aire et de temps, traversent les trois éléments plans dont il vient d'être parlé, et dont dépendent les flux calorifiques passant à travers tous les autres éléments superficiels menés à l'endroit (x, y, z). Mais alors les variables de ces fonctions se réduisent aux trois dérivées en x, y, z d'une quantité (la température) *unique* et *indépendante* des axes: double circonstance d'où résulte une grande simplicité des transformations.

fonctions linéaires des valeurs *actuelles* ou non accrues des coefficients, seront les valeurs des dérivées, par rapport à θ, des coefficients physiques eux-mêmes. On aura donc formé de la sorte ces équations différentielles linéaires, déterminant de proche en proche, quand θ varie, les variations des coefficients, dont il a été question tout à l'heure pour un cas plus simple où les variables seules changeaient et non, avec elles, les fonctions.

Cela posé, si l'on admet que le corps soit isotrope, les coefficients physiques dont on parle ne dépendront pas de θ, et l'on devra annuler les expressions de leurs dérivées, fonctions linéaires de ces coefficients. On établira de la sorte entre eux des équations du premier degré sans seconds membres, en nombre égal au leur, mais pouvant n'être pas toutes distinctes, et qui, résolues, détermineront seulement certains coefficients en fonction linéaire des autres restés arbitraires. Alors, les équations différentielles étant satisfaites par l'hypothèse de l'invariabilité de ces derniers, une rotation θ quelconque de Ox et Oy autour de Oz ne changera rien aux expressions trouvées des fonctions que l'on étudie; et celles-ci conviendront bien pour un corps *isotrope autour de l'axe des z*, c'est-à-dire pareillement constitué par rapport à tous les systèmes d'axes obtenus en faisant tourner ensemble ceux des x et des y autour de celui des z (appelé alors *axe d'isotropie*). Et si, en ajoutant de nouvelles relations entre les coefficients ou faisant de nouvelles réductions, on exprime de même qu'une rotation quelconque autour de l'un des deux autres axes Ox, Oy laisse subsister les mêmes formules pour représenter les propriétés physiques du corps, ces formules seront celles qui conviendront dans le cas d'un corps tout à fait isotrope ou pareillement constitué par rapport à tous les systèmes d'axes pouvant se déduire les uns des autres par des changements quelconques d'orientation; car on a vu, à la fin du numéro précédent (p. 115*), que ces changements équivalent à deux rotations autour de deux axes successifs des z, combinées avec une rotation intermédiaire autour d'un axe des x ou des y.

D'ordinaire, on simplifie extrêmement les calculs en ayant soin d'effectuer d'abord des rotations de deux angles droits et d'un angle droit autour des divers axes, dans le cas d'isotropie complète, ou seulement autour de l'axe des z, si l'isotropie du milieu n'existe que par rapport à cet axe. Ces rotations spéciales, autour de Oz par exemple, reviennent, supposé qu'il s'agisse d'étudier des déformations, à laisser les mêmes la coordonnée z et la composante w des déplacements, mais à changer : 1°, quand la rotation est de *deux* droits, x en $-x$, y en $-y$, u en $-u$, v en $-v$ (de sorte que, sur les six déformations ∂, g expri-

mées par (51), p. 105*, deux seulement, g_{yz} et g_{zx}, se changent en $-g_{yz}$ et $-g_{zx}$, les autres gardant leur forme]; 2°, quand la rotation est de *un* droit, x en $-y$, y en x, u en $-v$, v en u (et, par conséquent, ∂_x en ∂_y, ∂_y en ∂_x, g_{xy} en $-g_{xy}$, g_{yz} en g_{zx}, g_{zx} en $-g_{yz}$, ∂_z seul gardant la même expression) [1]. On voit de suite les relations que doivent vérifier les divers coefficients physiques pour que ces simples changements de signe ou ces permutations n'altèrent pas leurs valeurs; et la recherche ultérieure en devient généralement aisée. Dans les cas où un plan coordonné, celui des xy par exemple, devrait être un ***plan de symétrie de contexture***, c'est-à-dire où il s'agirait d'un corps tellement constitué, que le renversement du sens de l'axe normal des z, ou le changement isolé de z en $-z$ (et, par conséquent, de w en $-w$, de g_{yz} en $-g_{yz}$ et de g_{zx} en $-g_{zx}$), ne dût pas modifier l'expression des propriétés physiques du corps, on ne manquerait pas non plus d'effectuer ce changement et d'en déduire de nouvelles réductions, à moins que déjà les réductions précédentes basées sur de pures considérations d'isotropie eussent suffi pour établir la symétrie de constitution dont il s'agit. Et ce n'est qu'après cette discussion préalable, tout intuitive, qu'on achèvera d'exprimer l'isotropie du corps en recourant à la considération d'une rotation élémentaire ι.

L'exemple le plus remarquable peut-être de ces sortes de calculs consiste dans la recherche, pour un solide isotrope autour de l'axe des z, du ***potentiel d'élasticité***, qui est une certaine fonction Φ, entière et à termes du second degré, des six petites déformations ∂, g éprouvées par une particule quelconque du solide à partir d'un état primitif (dit ***naturel***) où la particule était libre de toute pression, fonction dont la valeur ne dépend pas des axes choisis, mais dont les six dérivées partielles en ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} expriment ce que l'on appelle les ***six*** pressions ou forces élastiques relatives à ces axes. Et, d'abord, la rotation d'une demi-circonférence autour de l'axe des z montre que la fonction Φ doit se dédoubler en deux, contenant, l'une ∂_x, ∂_y, ∂_z et g_{xy}, l'autre g_{yz} et g_{zx}; car, dans cette rotation où g_{yz} et g_{zx} seuls changent de signe, leurs produits par ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{xy} en changent

---

(1) Il est rare qu'on ait à effectuer d'autres rotations finies d'axes que celles-là, d'une moitié ou d'un quart de circonférence. Il y a lieu cependant de le faire dans l'étude des cristaux qui coïncident avec eux-mêmes par des rotations d'un sixième ou d'un tiers de circonférence autour de leur axe principal; cas où il faut choisir, pour exprimer leurs propriétés physiques, des formules telles, qu'une pareille rotation n'y change rien. La rotation à opérer serait précisément d'un quart ou d'une moitié de circonférence dans les autres cas de cristaux ayant un axe principal de symétrie.

également et ces produits, dans Φ, prennent des coefficients contraires, dont l'égalité à leurs premières valeurs, nécessaire pour l'isotropie, exige l'annulation. Quant à la rotation d'un quart de circonférence, elle montre que, dans Φ, ∂_y^2 a même coefficient que ∂_x^2, $\partial_y\partial_z$ même coefficient que $\partial_z\partial_x$, g_{yz}^2 même coefficient que g_{zx}^2, $\partial_y g_{xy}$ même coefficient, changé de signe, que $\partial_x g_{xy}$, et, en outre, que, d'une part, le produit de ∂_z par g_{xy}, d'autre part, le produit de g_{yz} par g_{zx}, ont leurs coefficients nuls, ou qu'il ne subsiste plus que cinq des produits mutuels des six déformations ∂, g, savoir, $\partial_y\partial_z$, $\partial_z\partial_x$, $\partial_x\partial_y$, $\partial_x g_{xy}$, $\partial_y g_{xy}$. Donc, en appelant λ, λ', $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}\mu'$, $\frac{1}{2}\nu$, $\frac{1}{2}\nu'$, $\frac{1}{2}\nu''$ certains coefficients physiques, on aura pour Φ une expression de la forme

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = \frac{\nu}{2}\partial_z^2 + \frac{\nu'}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \lambda\partial_x\partial_y + \lambda'(\partial_x + \partial_y)\partial_z + \frac{\nu''}{2}(\partial_x - \partial_y)g_{xy} \\ + \frac{\mu}{2}g_{xy}^2 + \frac{\mu'}{2}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2). \end{aligned} \right.$$

Effectuant maintenant, autour de l'axe des z, la rotation élémentaire ι des deux autres axes, substituons dans (59), à ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, leurs nouvelles expressions (58) [p. 114*], et nous verrons que l'expression du second membre, qui ne doit pas changer, s'accroît de termes dont le quotient par ι est, en tout,

$$(2\mu + \lambda - \nu')(\partial_x - \partial_y)g_{xy} - \nu''[(\partial_x - \partial_y)^2 - g_{xy}^2].$$

Ainsi, la dérivée, par rapport à θ, des coefficients de ∂_z^2, de $(\partial_x + \partial_y)\partial_z$ et de $g_{yz}^2 - g_{zx}^2$ est identiquement nulle; mais celle des coefficients de $\partial_x^2 + \partial_y^2$, de $\partial_x\partial_y$, de $(\partial_x - \partial_y)g_{xy}$ et de g_{xy}^2 a les valeurs respectives ν'', $-2\nu''$, $2\mu + \lambda - \nu'$, $-\nu''$. L'isotropie autour de l'axe des z existera donc complètement, si l'on se contente de poser, d'une part, $\nu'' = 0$, d'autre part, $2\mu + \lambda - \nu' = 0$ ou $\nu' = \lambda + 2\mu$, et d'écrire, par conséquent, au lieu de (59),

$$(60)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = \frac{\lambda}{2}(\partial_x + \partial_y)^2 + \lambda'(\partial_x + \partial_y)\partial_z + \frac{\nu}{2}\partial_z^2 \\ + \mu\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{1}{2}g_{xy}^2\right) + \frac{\mu'}{2}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2), \end{aligned} \right.$$

formule vérifiant d'elle-même les conditions de symétrie de contexture par rapport aux plans coordonnés, car de simples changements de signe des glissements g ne la modifient pas.

Il ne subsiste donc que cinq coefficients (dits d'*élasticité*) distincts; et il est clair qu'ils se réduiraient même à deux, si un autre axe que celui des z, l'axe des x par exemple, était aussi un axe d'isotropie.

cas où, dans (59), $\partial_x\partial_y$ et $\partial_x\partial_z$, g_{xy}^2 et g_{xz}^2, ∂_y^2 et ∂_z^2 devraient évidemment avoir leurs coefficients respectifs égaux. Il viendrait $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu = \nu' = \lambda + 2\mu$; et la formule (60), alors symétrique en ∂_x, ∂_y, ∂_z et en g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, serait celle qui convient pour un corps entièrement isotrope, savoir

$$(61)\qquad \Phi = \frac{\lambda}{2}(\partial_x + \partial_y + \partial_z)^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + \frac{\mu}{2}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2).$$

COMPLÉMENT A LA HUITIÈME LEÇON.

ÉLIMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES PAR LA DIFFÉRENTIATION: ÉTUDE DES FONCTIONS HOMOGÈNES; APPLICATION DU THÉORÈME DE CAUCHY SUR LE RAPPORT DES ACCROISSEMENTS SIMULTANÉS DES FONCTIONS A LA THÉORIE DES ASYMPTOTES RECTILIGNES.

79*. — Élimination, par la différentiation, de fonctions arbitraires. et formation d'équations aux dérivées partielles qui expriment une propriété du plan tangent commune à toute une classe de surfaces, comprenant une infinité de familles, ou une propriété de toute une classe de fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Lorsque la fonction proposée, que j'appellerai ici u, dépend, en même temps que de divers paramètres, de plusieurs variables indépendantes $x, y, \ldots$. l'équation qui la définit peut être différentiée par rapport à chacune d'elles et donne ainsi naissance à tout autant de nouvelles équations, contenant respectivement les dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots$, qu'il y existe de ces variables $x, y, \ldots$. Ayant de la sorte plus d'équations que dans le cas d'une seule variable indépendante, on peut effectuer des éliminations beaucoup plus générales et se débarrasser non seulement d'un paramètre, mais même, comme je le montrerai bientôt sur un exemple, d'une fonction arbitraire. On forme donc alors, entre les variables $x, y, \ldots, u$ et les dérivées partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots$, une équation, dite *aux dérivées partielles*, commune à ce qu'on peut appeler toute une *classe* de fonctions, catégorie bien plus étendue que les *familles* à un ou plusieurs paramètres considérées tout à l'heure, car elle en comprend une infinie variété. Quand, en particulier, on a deux variables indépendantes x, y, et que u est l'ordonnée d'une classe de surfaces, ses deux dérivées en x et y, appelées p et q dans une précédente Leçon (p. 94), définissent (p. 95) la direction du plan tangent ou celle de la normale; et, par conséquent, l'équation aux dérivées partielles entre x, y, u, p et q, commune à toutes les surfaces considérées, exprime une propriété de leur plan tangent ou de leur normale.

Semblablement à ce qui arrive dans le cas d'une fonction y de x et de deux, trois, ... paramètres, où un pareil nombre de différentiations en x permet d'éliminer ces paramètres et conduit à une équation différentielle d'ordre supérieur, de même, quand l'expression de la fonction donnée de $x, y, \ldots$ contient plus d'une fonction arbitraire, des différentiations poussées jusqu'aux dérivées du second ordre ou du troisième ordre, etc., rendent possible l'élimination de ces fonctions arbitraires et la formation de ce qu'on appelle *une équation aux dérivées partielles d'ordre supérieur*.

89*. — Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et autres propriétés générales de ces fonctions.

Prenons comme exemple l'expression générale d'une fonction u, homogène et d'un degré entier ou fractionnaire m, de variables données x, y, z, en nombre quelconque. On sait qu'une telle fonction u est dite homogène du degré m quand son rapport à la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'une des variables, x par exemple, dépend uniquement des rapports des autres variables, y, z, à celle-là x ou, en d'autres termes, quand le quotient $\frac{u}{x^m}$ est une certaine fonction, qu'on peut appeler f, des rapports $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}$. On a donc pour l'expression générale proposée de u, avec une fonction *arbitraire* f, la formule

$$(1) \qquad u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

La différentiation en x, y, z de cette valeur de u introduit linéairement les dérivées partielles premières de f, qui, avec f, donnent en tout un nombre d'arbitraires égal seulement au nombre des relations ainsi obtenues pour évaluer les dérivées partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$. En joignant à ces relations la proposée (1), on aura donc un système d'équations juste suffisant pour permettre d'éliminer les quantités arbitraires et mettre, par conséquent, en vue une propriété commune à toutes les fonctions homogènes possibles de degré m.

Avant de procéder à ce calcul, et, pour en accroître l'intérêt, je rappellerai la principale raison de l'importance qu'ont en Géométrie et dans les Mathématiques appliquées les fonctions homogènes. Quand une loi géométrique ou physique s'exprime algébriquement, la formule générale qui la traduit ne dépend pas des unités de longueur, de temps ou de masse choisies. Rien n'empêche donc de prendre, par

exemple, comme mesure des longueurs, l'une, x, des lignes $x, y, z, \ldots$ considérées dans la question; ce qui fait évidemment acquérir aux autres, $y, z, \ldots$ les valeurs respectives $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots$ et réduit les relations existant entre toutes ces lignes à ne plus contenir que les rapports $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots$ ou à n'avoir pour membres que des fonctions homogènes du degré zéro. Donc les équations exprimant des lois naturelles peuvent toujours être présentées de manière que leurs deux membres soient des fonctions homogènes du degré zéro par rapport aux diverses quantités d'une même espèce qui y figurent. Et si alors, pour chasser, par exemple, des dénominateurs, *on multiplie ces équations par une* certaine puissance, x^m, de l'une des variables de chaque espèce, les deux membres changeront de degré, mais ne cesseront pas d'être homogènes. C'est dire que toutes les lois de la Géométrie, de la Mécanique, de la Physique, etc., se représentent par des équations plus ou moins complexes, mais homogènes, du moins tant que les unités de mesure n'y sont pas spécifiées et qu'on assimile, bien entendu, à des variables de forme convenable, les paramètres ou coefficients physiques (exprimant des produits ou des quotients de longueurs, de temps ou de masses) *dont la valeur numérique change avec les unités* choisies.

Pour éliminer f, différentions l'expression (1) de u, soit par rapport à x, soit par rapport à y, soit par rapport à z, en observant que, par rapport à y et à z, u est une fonction de fonction $\left(\text{vu que } y \text{ ou } z \text{ figurent seulement dans une des variables } \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \text{ de la fonction } f\right)$, tandis que, par rapport à x, u est une fonction composée. Les dérivées de $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}$ par rapport à x étant $\frac{-y}{x^2}, \frac{-z}{x^2}$, et leurs dérivées respectives en y ou z étant simplement $\frac{1}{x}$, il viendra

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = m x^{m-1} f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right) - x^{m-1}\left(\dfrac{df}{d\frac{y}{x}}\dfrac{y}{x} + \dfrac{df}{d\frac{z}{x}}\dfrac{z}{x}\right), \\[2ex] \dfrac{du}{dy} = x^{m-1}\dfrac{df}{d\frac{y}{x}}, \qquad \dfrac{du}{dz} = x^{m-1}\dfrac{df}{d\frac{z}{x}}. \end{array} \right.$$

On remarquera que ces valeurs de $\frac{du}{d(x, y, z)}$, divisées par x^{m-1}, ne

dépendent plus que des rapports $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$; de sorte qu'elles sont elles-mêmes des fonctions homogènes du degré $m-1$. On peut donc déjà énoncer la propriété générale suivante :

Les dérivées partielles premières de toute fonction homogène d'un degré quelconque m *sont des fonctions homogènes du degré* $m-1$.

Mais éliminons d'abord, entre les équations (2), les dérivées partielles de la fonction f, dont le nombre est inférieur au leur d'une unité. Il suffit, pour cela, d'ajouter ces équations, après les avoir respectivement multipliées par x, y, z. Le résultat est simplement

$$(3) \qquad x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}=mx^m f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right).$$

Éliminons enfin la fonction f elle-même, ou mieux le produit $x^m f$, entre cette équation (3) et la proposée (1), en remplaçant dans le second membre de (3) $x^m f$ par sa valeur u tirée de (1); et il vient l'équation aux dérivées partielles cherchée, exprimant une propriété commune à toutes les fonctions homogènes de degré m,

$$(4) \quad x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}=mu, \quad \text{ou} \quad \left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz}\right)u=mu.$$

Telle est la formule du *théorème des fonctions homogènes* ou *théorème d'Euler*, qui s'énonce ainsi : *Quand on ajoute ensemble les produits obtenus en multipliant chaque dérivée partielle première d'une fonction homogène par la variable correspondante, on reconstitue cette fonction homogène, multipliée par son degré d'homogénéité.*

De là résultent des propriétés analogues, mais plus complexes, pour les dérivées partielles secondes, troisièmes, etc.

Par exemple, la relation (4), appliquée successivement aux dérivées premières de u, qui sont des fonctions homogènes du degré $m-1$, donne

$$\left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz}\right)\frac{du}{dx}=(m-1)\frac{du}{dx},$$
$$\left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz}\right)\frac{du}{dy}=(m-1)\frac{du}{dy},$$
$$\left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz}\right)\frac{du}{dz}=(m-1)\frac{du}{dz}.$$

Or multiplions celles-ci respectivement par x, y, z, puis ajoutons-les, et observons que le second membre obtenu égalera $(m-1)mu$ d'après (4). En écrivant sous la forme, qui nous est familière, d'un

carré symbolique, le premier membre du résultat, somme de produits des dérivées partielles secondes de u par les variables x, y, z correspondantes, il viendra

$$(5)\qquad \left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz}\right)^2 u = m(m-1)u.$$

De même, en remplaçant successivement, dans celle-ci, u par les dérivées partielles $\frac{du}{d(x,y,z)}$ [ce qui impliquera la substitution de $m-1$ à m], puis, multipliant les résultats par x, y, z et ajoutant, il viendra, entre la fonction u et ses dérivées partielles troisièmes, la relation

$$(6)\qquad \left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz}\right)^3 u = m(m-1)(m-2)u.$$

Et ainsi de suite pour les dérivées partielles d'ordres de plus en plus élevés.

81*. — Propriété particulière aux fonctions homogènes et entières du second degré : loi curieuse de réciprocité qui en résulte pour les déplacements intérieurs d'équilibre d'un corps élastique soumis à diverses actions.

Les fonctions homogènes et entières du second degré, c'est-à-dire de la forme

$$u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \ldots + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + \ldots,$$

ont une importance particulière, à cause de leur simplicité et aussi d'applications qu'elles comportent dans diverses branches de la Physique mathématique. On vérifie de suite que, conformément à l'équation (4), la somme des produits par x, y, z, ... de leurs dérivées partielles premières

$$2(Ax + Fy + Ez + \ldots), \quad \text{etc.}$$

donne bien identiquement le double $2u$ de leur valeur. Mais elles possèdent en outre une propriété spéciale, dont le rôle est capital dans l'étude des petites déformations et surtout des mouvements vibratoires des corps élastiques. Elle consiste en ce que, *si l'on prend les dérivées partielles premières de ces fonctions par rapport à leurs variables x, y, z, ..., puis qu'on les multiplie respectivement par de nouvelles variables x_1, y_1, z_1, ..., la somme des produits est symétrique en x et x_1, y et y_1, z et z_1, ..., c'est-à-dire identique à celle qu'on aurait en y permutant à la fois x et x_1, y et y_1,*

z et z_1, ... En d'autres termes, u_1 désignant ce que devient la fonction u quand on remplace ses variables x, y, z, ... par x_1, y_1, z_1, ..., on a

$$(7)\qquad x_1\frac{du}{dx}+y_1\frac{du}{dy}+z_1\frac{du}{dz}+\ldots = x\frac{du_1}{dx_1}+y\frac{du_1}{dy_1}+z\frac{du_1}{dz_1}+\ldots.$$

Il suffit évidemment de démontrer ce théorème pour les fonctions ne comprenant qu'un seul terme; car, lorsqu'une fonction u ou u_1 se compose de plusieurs termes, chacun des deux membres de (7) est visiblement la somme des valeurs qu'il aurait pour les divers termes pris seuls; et il suffit que ces valeurs partielles soient égales chacune à chacune dans les deux membres pour qu'on puisse en dire autant des valeurs totales. Or une fonction monôme du second degré est de l'une des deux formes $u = Ax^2$, $u = Ayz$, suivant qu'il y figure le carré d'une des variables ou le produit de deux d'entre elles. Dans le premier cas, les dérivées partielles premières de u se réduisent à une seule, $2Ax$ par exemple, et le premier membre de (7), devenu $2Axx_1$, est bien symétrique en x et en x_1. Dans le second cas, la fonction $u = Ayz$ a deux dérivées : l'une, Az, en y, l'autre, Ay, en z; et le premier membre de (7) est l'expression $A(y_1z + z_1y)$, également symétrique par rapport à y et y_1, z et z_1. Le théorème est donc vrai.

Pour donner une idée de ses applications à l'équilibre des corps élastiques, considérons un tel corps, pris d'abord en repos et à l'*état naturel* (c'est-à-dire libre de toute action extérieure), comme l'ensemble d'un nombre prodigieux de *points matériels*, que je désignerai respectivement par m, m', m'', ..., rapportés à un système d'axes rectangulaires des x, y, z; et supposons que, par l'application, à ces divers points, de certaines forces extérieures se faisant équilibre sur l'ensemble du corps, on leur imprime de petits déplacements, dont j'appellerai les trois projections, suivant les axes, u, v, w pour le point m, u', v', w' pour le point m', u'', v'', w'' pour le point m'', ... Je désignerai d'ailleurs par X, Y, Z les trois composantes, suivant les axes, de la force extérieure ou déformatrice appliquée au premier point; et, de même, par X', Y', Z' les composantes pareilles pour le second point, par X'', Y'', Z'' celles qui seront exercées de même sur le troisième; etc. Ces forces se trouveront neutralisées par les composantes analogues des réactions intérieures qu'auront fait naître les petits déplacements, composantes qui sont ainsi, respectivement, $-X$, $-Y$, $-Z$ sur le premier point, $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ sur le second, etc. Or, en vertu d'une loi physique fondamentale, ces composantes des réactions intérieures sont des fonctions homogènes du premier degré de tous les

petits déplacements $u, v, w, u', v', w', \ldots$ qui leur ont donné naissance, et elles égalent les dérivées partielles respectives d'une même fonction homogène et entière du second degré φ [dite *fonction des forces* (¹)] de tous ces déplacements. On a donc, pour résoudre le problème de l'équilibre, c'est-à-dire pour déterminer $u, v, w, u', v', \ldots$ quand $X, Y, Z, X', Y', \ldots$ sont connus, le système d'équations du premier degré

$$(8)\qquad \frac{d\varphi}{du} = -X,\quad \frac{d\varphi}{dv} = -Y,\quad \frac{d\varphi}{dw} = -Z,\quad \frac{d\varphi}{du'} = -X',\quad \ldots$$

Avec un second système de forces $X_1, Y_1, Z_1, X'_1, \ldots$, on aurait de nouvelles valeurs $u_1, v_1, w_1, u'_1, \ldots$ pour les déplacements. Appelons φ_1 ce que deviendrait alors l'expression de φ, et les équations (8) seront, dans ce second cas,

$$(9)\qquad \frac{d\varphi_1}{du_1} = -X_1,\quad \frac{d\varphi_1}{dv_1} = -Y_1,\quad \frac{d\varphi_1}{dw_1} = -Z_1,\quad \frac{d\varphi_1}{du'_1} = -X'_1,\quad \ldots$$

Cela posé, la formule (7) appliquée aux fonctions homogènes et entières du second degré φ et φ_1, où $u, v, w, u', v', \ldots$ et $u_1, v_1, w_1, u'_1, v'_1, \ldots$ ont maintenant le rôle qu'avaient $x, y, z, \ldots$ dans u et $x_1, y_1, z_1, \ldots$ dans u_1, donne

$$\left\{\begin{aligned} & u_1\frac{d\varphi}{du} + v_1\frac{d\varphi}{dv} + w_1\frac{d\varphi}{dw} + u'_1\frac{d\varphi}{du'} + \ldots \\ & = u\frac{d\varphi_1}{du_1} + v\frac{d\varphi_1}{dv_1} + w\frac{d\varphi_1}{dw_1} + u'\frac{d\varphi_1}{du'_1} + \ldots \end{aligned}\right.$$

ou bien, en introduisant, d'après (8) et (9), les valeurs des forces extérieures $X, Y, \ldots, X_1, Y_1, \ldots$, et changeant les signes,

$$(10)\qquad Xu_1 + Yv_1 + Zw_1 + X'u'_1 + \ldots = X_1 u + Y_1 v + Z_1 w + X'_1 u' + \ldots.$$

Or la somme des produits des forces $X, Y, \ldots$ par certains déplacements de *mêmes* sens $u_1, v_1, \ldots$ de leurs points d'application, constitue ce qu'on appelle le *travail* de ces forces pour ces déplacements. La relation (10) exprime donc que, *si deux systèmes différents de forces se font séparément équilibre sur le corps, chacun d'eux produit le même travail total dans les déplacements ou les déformations d'équilibre que fait naître l'autre.*

Supposons maintenant que, dans chaque système, les forces exté-

(¹) On la désigne ainsi, pour rappeler que toutes les forces intérieures en jeu dans le système considéré de points matériels s'en déduisent par de simples différentiations.

rieures dont le travail n'est pas nul se réduisent à une seule (les autres, qui lui font équilibre, n'étant appliquées qu'en des points maintenus *fixes*) : il y aura évidemment égalité des produits respectifs de chacune de ces deux forces par la projection, sur elle, du déplacement de son point d'application sous l'action de l'autre. Et il n'est pas moins évident que la même égalité continuera, d'après (10), à s'observer, si l'on décompose ces deux forces en actions élémentaires ne sollicitant que des points dont les déplacements en question soient pareils. Quand, par exemple, les deux forces dont il s'agit seront les poids de deux charges équivalentes, déposées dans deux petites régions différentes du corps élastique, ces deux charges, par les déformations qu'elles feront naître sur le corps, s'imprimeront mutuellement le même déplacement vertical, dans lequel ne sera pas compris, bien entendu, celui qu'éprouvera chacune d'elles par l'effet de son propre poids [1].

90*. — Application du théorème de Cauchy à l'étude des rapports existant entre les tangentes, très éloignées, d'une branche infinie de courbe, et son asymptote.

Le théorème de Cauchy peut être utile dans d'autres questions que l'étude des expressions de forme indéterminée. Il permet, par exemple, de démontrer analytiquement que, si la suite des tangentes à une branche infinie de courbe plane tend vers une position limite, celle-ci est asymptote à la courbe; et que l'asymptote, toutes les fois qu'elle existe, est la limite vers laquelle tend, sinon toujours la série complète des tangentes, du moins la série indéfinie mais discontinue formée par certaines d'entre elles : faits peut-être non moins faciles, il est vrai, à établir d'une manière purement géométrique.

A cet effet, donnons-nous sous la forme $y = f(x)$ l'équation de la branche infinie considérée, le long de laquelle x est supposé croître indéfiniment, et admettons la continuité tant de la fonction y que de

---

(1) J'avais remarqué d'abord cette curieuse loi de réciprocité dans les cas d'une plaque circulaire appuyée ou encastrée sur tout son contour et d'une barre ayant chacune de ses deux extrémités appuyée ou encastrée (*voir* mon Volume intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, etc., pp. 128, 138 et 562). M. Valentino Cerruti, professeur de Mécanique à l'Université de Rome, me fit observer qu'elle pouvait se généraliser, car elle résultait d'un théorème, sur le potentiel des forces élastiques, remarqué en 1874 par M. Betti et par moi-même, et qui n'est qu'une application de la formule (7).

sa dérivée y'. Soient (x_0, y_0) un point de la courbe très éloigné et (x_1, y_1) un autre point pris incomparablement plus loin encore, ou tel, que le rapport de x_0 à x_1 égale une quantité fort petite ε. Comparons entre eux les accroissements éprouvés par les deux fonctions continues et à dérivée continue $\frac{y}{x}$, $\frac{1}{x}$, quand x y passe de la valeur x_0 à la valeur x_1. Ce rapport, étant celui de $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_0}{x_0}$ à $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}$, vaudra le quotient de $y_0 - x_0\frac{y_1}{x_1}$ par $1 - \frac{x_0}{x_1}$ ou par $1 - \varepsilon$, et, d'après le théorème de Cauchy, il égalera le rapport, $y - xy'$, des dérivées, $\frac{xy' - y}{x^2}$, $\frac{-1}{x^2}$, de $\frac{y}{x}$ et de $\frac{1}{x}$, pour une certaine valeur x intermédiaire entre x_0 et x_1. On aura donc

$$y_0 - x_0\frac{y_1}{x_1} = (y - xy')(1 - \varepsilon), \tag{22}$$

relation facile à interpréter, car $y - xy'$ est l'*ordonnée à l'origine* de la tangente menée à la courbe en (x, y), c'est-à-dire la distance séparant l'origine du point où l'axe des y se trouve coupé par cette tangente (qui a pour coefficient angulaire y'), et $y_0 - x_0\frac{y_1}{x_1}$ est, de même, l'ordonnée à l'origine de la droite menée en (x_0, y_0) dans la direction définie par le coefficient angulaire $\frac{y_1}{x_1}$, ou parallèlement à la droite joignant l'origine au point (x_1, y_1).

Il est clair, d'après cette formule (22), que, si l'ordonnée à l'origine de la tangente tend vers une certaine limite b à mesure que x grandit, l'ordonnée à l'origine $y_0 - x_0\frac{y_1}{x_1}$ tendra aussi vers b. Et les quotients, $\frac{y}{x} - y'$ et $\frac{y_0}{x_0} - \frac{y_1}{x_1}$, de ces deux ordonnées finies, par x et x_0, deviendront infiniment petits; ce qui, donnant, avec une erreur relative de plus en plus faible, $\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_1}{x_1}$ et $y' = \frac{y}{x}$, montre, d'abord, en faisant varier x_0 indépendamment de x_1, que $\frac{y}{x}$ tendra vers une certaine limite finie, que j'appellerai a, et, ensuite, que y' tendra aussi vers cette limite a. Donc, d'une part, la tangente, définie complètement par son coefficient angulaire y' et son ordonnée à l'origine $y - xy'$, admettra une position limite; et, de même, la droite menée par (x_0, y_0) dans la direction que définit le coefficient angulaire $\frac{y_1}{x_1}$ en admettra

une analogue, appelée, comme on sait, l'asymptote à la courbe, qui s'en approche indéfiniment (car on peut, en construisant cette droite, mobile le long de la courbe, prendre $x_1 = x$ ou $\frac{y_1}{x_1} = a$, de manière à ne la déplacer que parallèlement à elle-même, suivant l'axe des y, de la quantité restreinte, constante pour toute son étendue, dont varie son ordonnée à l'origine). D'autre part, ces deux positions limites n'en feront qu'une. Donc, quand la tangente s'approche d'une position limite, celle-ci est bien l'asymptote, déterminée, de la manière connue, par son coefficient angulaire et par son ordonnée à l'origine.

Mais supposons, réciproquement, qu'une asymptote à la branche de courbe existe dans le plan, et appelons a son coefficient angulaire, b son ordonnée à l'origine. La parallèle qu'on lui mènera par (x_0, y_0) aura son ordonnée à l'origine $y_0 - a x_0$ extrêmement peu différente de b; d'où il suit, en divisant par l'abscisse très grande x_0, que la différence $\frac{y_0}{x_0} - a$ sera extrêmement petite, ou que le rapport $\frac{y}{x}$ tendra vers a à mesure que x croîtra. Prenons x_1 assez grand pour que $\frac{y_1}{x_1}$ diffère de a incomparablement moins que $\frac{y_0}{x_0}$, ou pour que la différence $y_0 - x_0 \frac{y_1}{x_1}$ se confonde presque avec $y_0 - a x_0$ et, par conséquent, avec b. Il est clair, d'après (22), que l'on aura sensiblement $y - xy' = b$, équation d'où résultera, en divisant par l'abscisse très grande x, $y' =$ sensiblement $\frac{y}{x}$ ou a; c'est-à-dire que la tangente menée à la courbe en (x, y) aura presque la même ordonnée à l'origine et la même direction que l'asymptote. Ce raisonnement pouvant être répété avec une infinité de valeurs différentes, de plus en plus grandes, de x_0, de x_1 et, par suite, de x, on voit que *l'existence d'une asymptote entraîne bien celle d'une infinité de tangentes dont les positions sur le plan diffèrent de moins en moins de la sienne.*

Il faut donc que l'ordonnée à l'origine de la tangente, $y - xy'$, ne tende vers aucune limite, mais oscille indéfiniment dans une étendue sensible, en augmentant et puis diminuant une infinité de fois, pour que la suite continue des positions de la tangente ne tende pas vers l'asymptote. Or cela suppose que la dérivée de $y - xy'$, dérivée qui est $y' - y' - xy'' = -xy''$, change de signe une infinité de fois, ou que la dérivée seconde y'' n'en change pas moins souvent elle-même. Un tel fait n'arrivera jamais dans une courbe algébrique; car, d'après l'expression de y'' qu'on a appris à calculer au n° 56 (p. 111), ses

changements de signe ne peuvent se produire qu'aux points où elle devient soit nulle, soit infinie; ce qui, dans les deux cas, donne en x et y une équation algébrique, ne pouvant admettre, par sa combinaison avec l'équation même de la courbe, une infinité de solutions séparées les unes des autres. C'est donc seulement dans certaines lignes transcendantes que l'asymptote d'une branche de courbe peut n'être pas la limite des positions de toute la suite de ses tangentes.



COMPLÉMENT A LA NEUVIÈME LEÇON.

SÉRIE DE TAYLOR POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES; ETC.

96*. — Application de la série de Taylor au calcul le plus approché possible des dérivées d'une fonction par le moyen de deux ou de plusieurs valeurs voisines de la fonction.

Comme application de la formule de Taylor dans le cas d'accroissements h très petits, cherchons la meilleure manière d'évaluer approximativement les deux dérivées première et seconde $f'(x)$, $f''(x)$ d'une fonction $f(x)$, au moyen d'une suite de valeurs de $f(x)$ correspondant à des valeurs de la variable voisines et équidistantes, comme $x-h$, x, $x+h$, $x+2h$, etc.

Et, d'abord, la relation (13) [p. 152], si l'on y change x en $x-\frac{h}{2}$ et puis h en $2h$, devient

(23) $$f'(x) = (\text{sensiblement}) \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h};$$

ce qui montre que l'expression la plus approchée de $f'(x)$ par un rapport de petites différences s'obtient en divisant par $\Delta x = h$ non pas l'accroissement, $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, qui distingue de la valeur actuelle $f(x)$ de la fonction sa valeur suivante $f(x+h)$, ni la différence analogue, $\Delta f(x-h) = f(x) - f(x-h)$ de la valeur actuelle à la valeur précédente $f(x-h)$, mais leur demi-somme ou moyenne arithmétique, exprimée par $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2}$, et dans laquelle paraissent, à l'exclusion de la valeur actuelle $f(x)$ de la fonction, les deux valeurs précédente et suivante $f(x-h)$, $f(x+h)$.

Quant à la dérivée seconde $f''(x)$, en la regardant comme la dérivée de $f'(x)$, on trouvera par la formule (23), dans laquelle on remplacerait $2h$ par h et f par f',

$$f''(x) = (\text{sensiblement}) \frac{1}{h}\left[f'\left(x+\frac{h}{2}\right) - f'\left(x-\frac{h}{2}\right)\right].$$

Or on peut substituer de même $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ à $f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ à $f'\left(x-\frac{h}{2}\right)$. Il vient donc

$$(24)\quad \begin{cases} f''(x) = (\text{sensiblement})\ \dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \\ \qquad = \dfrac{2}{h^2}\left[\dfrac{f(x+h)+f(x-h)}{2}-f(x)\right]. \end{cases}$$

On formerait d'une manière analogue, pour les dérivées d'un ordre plus élevé $f'''(x)$, $f^{\text{iv}}(x)$, etc., des expressions où il n'entrerait évidemment pas plus de valeurs de la fonction venant après la valeur actuelle $f(x)$ que d'autres venant avant.

Les formules (23), (24), etc., ainsi obtenues, se vérifient d'ailleurs en remplaçant, dans leurs seconds membres, $f(x\pm h)$, etc. par les développements très convergents

$$f(x)\pm\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)\pm\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{\text{iv}}(x)\pm\ \ldots.\ \text{etc.}$$

Ces seconds membres deviennent, respectivement,

$$f'(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x)+\ \ldots.,\quad f''(x)+\frac{h^2}{12}f^{\text{iv}}(x)+\ \ldots.\ \text{etc.}$$

Ils expriment donc les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ... avec des erreurs comparables seulement à h^2, c'est-à-dire du second ordre de petitesse. Or, si l'on prenait pour la variable des fonctions f', f'', ... dans les premiers membres de (23), (24), etc., une valeur, $x+k$ par exemple, autre que celle x qui y figure et qui tient le milieu entre les valeurs extrêmes, comme $x\pm h$ dans (23) et (24), paraissant aux seconds membres, les changements de ces premiers membres par le fait de l'addition de k à x seraient en général du même ordre que k et, par conséquent, du premier ordre pour peu que k fût comparable à h, ou beaucoup plus grands que les écarts, de l'ordre de h^2, existant entre les seconds membres et les valeurs initiales $f'(x)$, $f''(x)$, ... des premiers. C'est bien dire que les seconds membres de (23), (24), etc. représentent incomparablement mieux les fonctions f', f'', ... pour la valeur x de la variable que pour toute autre en différant d'une fraction sensible de l'intervalle h. Ainsi, *dans l'évaluation des dérivées par des rapports de petites différences finies, l'approximation obtenue est beaucoup plus grande quand on y utilise un même nombre de valeurs de la fonction précédant sa valeur actuelle et de valeurs la suivant, que lorsqu'on y emploie ces dernières à l'exclusion des*

premières, comme induiraient à le faire les notations, parfaitement exactes d'ailleurs à la limite,

$$\left\{\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx},\\ f''(x) &= \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x+2dx)-2f(x+dx)+f(x)}{dx^2}, \quad \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

98*. — Extension de la série de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

De la formule de Taylor (10) [p. 148], démontrée pour le cas d'une seule variable x dont les accroissements h sont assez faibles, on déduit de suite qu'une fonction, $f(x, y, z)$, d'un nombre quelconque de variables x, y, z, comporte aussi une expression en série, procédant suivant les puissances de très petits accroissements positifs ou négatifs h, k, l reçus par ces variables respectives. En effet, l'on peut d'abord, dans $f(x+h, y+k, z+l)$, regarder $y+k$, $z+l$ comme de simples constantes et obtenir, par la formule (10), un développement en h^0, h^1, h^2, h^3, ..., avec des coefficients fonction de $y+k$, $z+l$; puis de nouvelles applications de cette formule (10) permettront de développer à leur tour ces coefficients, suivant les puissances de k, et ainsi de suite; après quoi il ne restera plus qu'à grouper ensemble les termes d'un même degré en h, k, l.

Ce groupement se trouve tout fait, et l'on arrive, presque sans calculs, à la formule définitive cherchée de $f(x+h, y+k, z+l)$, en se représentant les variables de la fonction $f(x, y, z)$ comme d'abord égales à leurs valeurs primitives données x, y, z, puis augmentées d'une manière continue, toutes à la fois, de quantités proportionnelles aux accroissements totaux h, k, l également donnés, quantités exprimables par ht, kt, lt si t désigne leur rapport commun à h, k, l, et en ordonnant enfin, par la formule de Mac Laurin, la fonction de t ainsi obtenue, $f(x+ht, y+kt, z+lt)$, suivant les puissances du rapport t, égal finalement à 1. Appelons, pour abréger, $\varphi(t)$ cette fonction composée $f(x+ht, y+kt, z+lt)$, qui dépend de t par l'intermédiaire des fonctions linéaires $x+ht, y+kt, z+lt$; et la formule (19) [p. 154], en y remplaçant f par φ, x par t, puis faisant $t=1$, donnera

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x+h, y+k, z+l)\\ &\quad = \varphi(0) + \frac{1}{1}\varphi'(0) + \frac{1}{1.2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\varphi^{n}(0) + R_n. \end{aligned}\right.$$

où le reste R_n, pris, par exemple, sous sa première forme (20) [p. 134], sera

$$(30) \qquad R_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}[\varphi^{(n)}(\theta) - \varphi^{(n)}(o)].$$

Or on reconnaît, sans peine, que cette expression (29) de $f(x+h, y+k, z+l)$ constitue justement le développement demandé, dans lequel $\varphi(o) = f(x, y, z)$ est le terme indépendant de $h, k, l, \frac{1}{1}\varphi'(o)$ l'ensemble des termes du premier degré en h, k, l, $\frac{1}{1.2}\varphi''(o)$ l'ensemble de ceux du second degré; et ainsi de suite, jusqu'à $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(o)$, qui représente l'ensemble des termes du $n^{ième}$ degré. En effet, d'après la règle donnée dans une Leçon précédente [p. 113, formule (26)] pour différentier une fonction de fonctions linéaires, les différentiations de $f(x+ht, y+kt, z+lt)$, où x, y, z, h, k, l sont ici des constantes, se feront au moyen de la formule symbolique

$$(31) \qquad \frac{d}{dt} = h\frac{d}{d(x+ht)} + k\frac{d}{d(y+kt)} + l\frac{d}{d(z+lt)},$$

dans laquelle les expressions $\frac{d}{d(x+ht)}, \frac{d}{d(y+kt)}, \frac{d}{d(z+lt)}$ signifient qu'on prend, de la fonction différentiée, les dérivées respectives par rapport aux variables $x+ht, y+kt, z+lt$, les seules dont elle dépende immédiatement; et les dérivées seconde, troisième, etc., par rapport à t, s'indiqueront de même symboliquement par le carré, le cube, etc., du second membre de cette formule. Donc si, dans les résultats, encore fonction uniquement des variables $x+ht$, $y+kt$, $z+lt$, on réduit ces variables soit à x, y, z, en faisant $t=o$, soit à $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l$, en faisant $t=\theta$, d'une part, les quantités $\varphi'(o), \varphi''(o), \ldots, \varphi^{(n)}(o)$ deviendront bien, en h, k, l, des polynômes homogènes et des degrés respectifs $1, 2, \ldots, n$; d'autre part, les coefficients de ces polynômes seront, à des facteurs numériques près, les dérivées partielles de l'ordre correspondant de la fonction $f(x, y, z)$, et, dans l'expression de $\varphi^{(n)}(\theta)$, ces dérivées se trouveront prises non plus pour les valeurs initiales x, y, z des variables, mais pour des valeurs $x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$ intermédiaires entre ces valeurs initiales x, y, z et les valeurs finales $x+h, y+k, z+l$. En définitive,

on aura, sous forme symbolique,

$$(32)\quad \begin{cases} f(x+h,\, y+k,\, z+l) \\ \quad = f(x, y, z) + \dfrac{1}{1}\left(h\dfrac{d}{dx} + k\dfrac{d}{dy} + l\dfrac{d}{dz}\right) f(x, y, z) \\ \qquad + \dfrac{1}{1.2}\left(h\dfrac{d}{dx} + k\dfrac{d}{dy} + l\dfrac{d}{dz}\right)^2 f(x, y, z) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{1}{1.2.3\ldots n}\left(h\dfrac{d}{dx} + k\dfrac{d}{dy} + l\dfrac{d}{dz}\right)^n f(x, y, z) + \mathrm{R}_n, \end{cases}$$

avec

$$(33)\quad \begin{cases} \mathrm{R}_n = \dfrac{1}{1.2.3\ldots n} \\ \quad \left\{\left[h\dfrac{d}{d(x+\theta h)} + k\dfrac{d}{d(y+\theta k)} + l\dfrac{d}{d(z+\theta l)}\right]^n f(x+\theta h,\, y+\theta k,\, z+\theta l) \right. \\ \qquad \left. - \left(h\dfrac{d}{dx} + k\dfrac{d}{dy} + l\dfrac{d}{dz}\right)^n f(x, y, z)\right\}, \end{cases}$$

et, après développements,

$$(34)\quad \begin{cases} f(x+h,\, y+k,\, z+l) \\ \quad = f(x, y, z) + \left(\dfrac{df}{dx}h + \dfrac{df}{dy}k + \dfrac{df}{dz}l\right) \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}h^2 + \dfrac{d^2f}{dy^2}k^2 + \dfrac{d^2f}{dz^2}l^2 + 2\dfrac{d^2f}{dy\,dz}kl + 2\dfrac{d^2f}{dz\,dx}lh + 2\dfrac{d^2f}{dx\,dy}hk\right) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \dfrac{1}{2.3\ldots n}\left(\dfrac{d^nf}{dx^n}h^n + \ldots + n\dfrac{d^nf}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \ldots \quad \ldots\right) + \mathrm{R}_n, \end{cases}$$

où

$$(35)\quad \begin{cases} \mathrm{R}_n = \dfrac{1}{2.3\ldots n}\left\{h^n\left[\dfrac{d^nf(x+\theta h,\, y+\theta k,\, z+\theta l)}{d(x+\theta h)^n} - \dfrac{d^nf(x, y, z)}{dx^n}\right] + \ldots \right. \\ \qquad \left. + n h^{n-1}k\left[\dfrac{d^nf(x+\theta h,\, y+\theta k,\, z+\theta l)}{d(x+\theta h)^{n-1}d(y+\theta k)} - \dfrac{d^nf(x, y, z)}{dx^{n-1}dy}\right] + \ldots\right\}. \end{cases}$$

La continuité, supposée par (30), de $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, …, $\varphi^{(n)}(t)$, depuis la valeur $t=0$ jusqu'à la valeur $t=1$, sera d'ailleurs assurée et, par conséquent, les formules précédentes s'appliqueront, si la fonction f et ses dérivées partielles des n premiers ordres, qui entrent dans les expressions de $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, …, $\varphi^{(n)}(t)$, sont finies et continues pour toutes les valeurs, $x+ht$, $y+kt$, $z+lt$, des variables, intermédiaires entre x, y, z et $x+h$, $y+k$, $z+l$.

Quand ces conditions se trouvent satisfaites, la série (32) ou (34)

converge très rapidement dans le cas d'accroissements h, k, l assez faibles, puisque l'ensemble de ses termes d'un degré quelconque est très petit de l'ordre indiqué par ce degré et, conséquemment, négligeable en comparaison de tout ensemble, qui ne serait pas identiquement nul, de termes précédents d'un même degré (*moindre*). *De plus, elle converge bien vers la valeur de* $f(x+h, y+k, z+l)$; car le reste R_n, exprimé par (35), est d'un ordre de petitesse supérieur au $n^{\text{ième}}$, comme ayant dans chacun de ses termes, outre n facteurs h, k, l très petits, un dernier facteur tendant vers zéro avec h, k, l, savoir l'accroissement, tel que

$$\frac{d^n f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l)}{d(x+\theta h)^n} - \frac{d^n f(x, y, z)}{dx^n},$$

d'une dérivée partielle d'ordre n de la fonction $f(x, y, z)$, pour les changements θh, θk, θl des variables. Ainsi, le reste R_n est une fraction aussi petite qu'on veut de l'ensemble des termes du $n^{\text{ième}}$ degré, pourvu qu'on n'ait pas $\varphi^{(n)}(0) = 0$. On le reconnaît d'ailleurs, directement, en comparant, dans R_n et dans cet ensemble, les termes qui se correspondent ou qui ont les mêmes facteurs h, k, l et les mêmes coefficients. Après la suppression de tous ces facteurs communs, on obtient des rapports, comme celui de

$$\frac{d^n f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l)}{d(x+\theta h)^n} - \frac{d^n f(x, y, z)}{dx^n} \quad \text{à} \quad \frac{d^n f(x, y, z)}{dx^n},$$

ayant pour dénominateurs les diverses dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre de $f(x, y, z)$, indépendantes de h, k, l, et, pour numérateurs, leurs accroissements très petits corrélatifs aux accroissements θh, θk, θl des variables : or il est évident que ces rapports deviennent aussi petits que l'on veut quand h, k, l tendent vers zéro, pourvu que leurs dénominateurs ne soient pas identiquement nuls.

J'observerai enfin que la formule de Taylor (34) se transformerait en celle de Mac Laurin, comme dans le cas d'une seule variable, si l'on y comptait les accroissements h, k, l à partir de valeurs nulles des variables x, y, z : ce qui permettrait d'appeler finalement x, y, z ces accroissements h, k, l.

COMPLÉMENT A LA ONZIÈME LEÇON.

EXEMPLES DE MAXIMA OU DE MINIMA DANS DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS; PREUVE DE L'EXISTENCE, CHEZ CERTAINS POLYNOMES, DE MINIMA NULS, DONT DÉPEND LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE.

106*. — Méthode des moindres carrés.

Les formules qui expriment avec une approximation plus ou moins grande les lois d'une même espèce de phénomènes naturels contiennent le plus souvent des coefficients, dits *constantes physiques* ou *paramètres physiques*, dont une détermination expérimentale précise est l'un des principaux buts que poursuivent les physiciens. Par exemple, tous les faits se rapportant à la pesanteur terrestre dépendent du nombre g, égal environ à $9^m,8$ quand l'unité de temps est la seconde; ceux qui concernent l'accroissement d'un corps en dimensions ou en volume par la chaleur dépendent de coefficients de dilatation *spécifiques*, c'est-à-dire propres au corps dont il s'agit; etc. Or, pour évaluer ces diverses constantes, le physicien ou l'ingénieur font un bien plus grand nombre d'observations qu'il ne leur en faudrait rigoureusement, ou qu'ils ne veulent calculer d'inconnues; car, sans parler du contrôle que chaque observation en excédent leur fournit de la loi ou formule à appliquer, ils peuvent, de la sorte, après avoir pris toutes les précautions pour ne pas laisser subsister dans leurs mesures *d'erreurs systématiques*, c'est-à-dire logiquement prévoyables, faire concourir à la détermination d'une même constante beaucoup de résultats observés, qu'ils ont lieu de croire alors approchés indifféremment par excès ou par défaut, en les combinant de manière à éliminer en majeure partie par neutralisation mutuelle leurs légères inexactitudes. Le nombre de celles-ci dans les deux sens doit, en effet, être supposé presque pareil quand ce ne sont plus que des *erreurs accidentelles:* en sorte que les combinaisons obtenues fournissent, pour le calcul des coefficients cherchés, des bases préférables aux résultats individuels de l'observation résumés en elles.

Par exemple, la moyenne arithmétique d'un grand nombre n de

mesures de la longueur d'un même objet, c'est-à-dire la $n^{\text{ième}}$ partie de leur somme, donne, en général, une évaluation sensiblement plus exacte de cette longuenr qu'elles ne le sont elles-mêmes : autrement dit, l'erreur de la moyenne, $n^{\text{ième}}$ partie de la somme *algébrique* des erreurs affectant les résultats individuels, décroît le plus souvent quand n grandit (¹). C'est du moins ce qu'indique le sens commun, susceptible d'être contrôlé par l'expérience toutes les fois que de nouveaux perfectionnements apportés aux instruments ou aux méthodes d'observation permettent d'augmenter la précision des mesures et de corriger les résultats antérieurs.

En général, chaque expérience faite se traduit par une équation, plus ou moins approchée, où il ne reste d'inconnu que les paramètres cherchés. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'avoir l'expression des longueurs l d'une barre métallique à diverses températures t, et que n observations aient été faites dans ce but. L'expérience ayant montré que la relation entre l et t peut être mise à très peu près sous la forme

$$l = a + bt + ct^2,$$

les paramètres à déterminer seront a, b, c. Or, en admettant qu'une première température observée t_1 ait donné une longueur mesurée l_1, qu'une deuxième température, t_2, ait donné une deuxième longueur, l_2, etc., on aura, entre a, b et c, les n équations du premier degré

$$\begin{aligned} a + t_1 b + t_1^2 c - l_1 &= 0, \\ a + t_2 b + t_2^2 c - l_2 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a + t_n b + t_n^2 c - l_n &= 0. \end{aligned}$$

Si ces n équations étaient compatibles, les valeurs de a, b, c tirées de trois d'entre elles les vérifieraient toutes. Mais comme, d'une part, la formule $l = a + bt + ct^2$ n'est pas absolument rigoureuse, que, d'autre

(¹) On conçoit, toutefois, que la somme algébrique des n erreurs, tout en pouvant osciller de part et d'autre de zéro quand n grandit, a d'autant plus de *jeu* pour croître en valeur absolue que le nombre n est plus grand; d'où il résulte qu'elle augmentera généralement avec n et que, par suite, l'erreur de la moyenne ne diminuera pas d'ordinaire dans un aussi grand rapport que l'inverse de n. La loi d'atténuation probable de l'erreur du résultat moyen, la plus naturelle qui se présente à l'esprit dans de telles conditions, est la proportionnalité inverse de cette erreur, en général ou en *moyenne*, à la fonction monôme de n la plus simple qui grandisse moins vite que n, savoir, à $\sqrt{n}$. Aussi cette loi est-elle précisément celle que d'autres raisons, d'un ordre assez analogue quoique plus difficiles à dégager, ont conduit à admettre.

part, l'inévitable imperfection de nos instruments et de nos organes rend inexactes les valeurs de t et l appelées t_1 et l_1, t_2 et l_2, etc., il n'arrivera, pour ainsi dire jamais, que les n équations obtenues entre a, b et c puissent être exactement satisfaites. On est donc conduit à ce problème, de déterminer le mieux possible des inconnues au moyen d'un nombre beaucoup plus grand d'équations qui ne sont qu'approximativement compatibles.

C'est justement ce que fait la règle des moyennes dans le cas le plus simple, alors que n évaluations d'une même quantité x ont donné pour celle-ci certaines valeurs peu différentes a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Les divers mesurages sont exprimés par les n équations

$$(11) \qquad x - a_1 = 0, \qquad x - a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x - a_n = 0,$$

auxquelles nous substituons, en vertu de cette règle, l'équation unique

$$(12) \qquad x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0 \quad \text{ou} \quad nx - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = 0.$$

Dans certains cas, les équations à résoudre dépassent le premier degré ou même sont transcendantes. Mais alors on détermine des valeurs approchées des paramètres au moyen de quelques-unes de ces équations données, qu'on choisit en nombre strictement suffisant pour former un système compatible; et l'on adopte pour inconnues de la question les petites corrections que doivent subir ensuite ces valeurs approchées, corrections par rapport auxquelles toutes les équations deviennent, comme on a vu plus haut (p. 84), très sensiblement du premier degré.

Ainsi, il y a lieu, étant donné un grand nombre n d'équations seulement approchées du premier degré à quelques inconnues, de chercher comment on pourra former avec elles un système compatible, dont la résolution conduise, pour les inconnues, à des valeurs qui vérifient assez bien toutes les équations proposées et qui, de plus, *tiennent* à peu près le *milieu* entre toutes les valeurs susceptibles d'y satisfaire de même approximativement, comme le fait la moyenne de a_1, a_2, ..., a_n dans le cas simple des équations (11).

La question ainsi posée devient un problème de minimum; car, admettant, pour fixer les idées, que nos équations, à trois inconnues, x, y, z, par exemple, soient

$$(13) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z - d_n = 0, \end{cases}$$

nous chercherons naturellement, vu l'impossibilité d'annuler à la fois tous leurs premiers membres, à rendre du moins aussi petite que possible la somme des valeurs absolues de ces premiers membres ou, plus généralement, la somme des puissances d'un certain degré m de ces valeurs absolues, en choisissant l'exposant m de manière que cette somme soit une fonction graduellement variable de x, y, z et qu'elle admette un minimum unique facile à calculer. En effet, dans ces conditions, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des premiers membres, pris en valeur absolue, du système (13), somme qui ne peut s'abaisser jusqu'à la limite zéro, mais qui peut en approcher beaucoup à raison de la quasi-compatibilité des équations (13), aura ses petites valeurs, rendant très faibles ces premiers membres, toutes groupées dans le voisinage du minimum, vu que, si l'on vient à s'éloigner du minimum en imprimant à x, y, z des variations modérées de sens inverses, la somme en question, à dérivée graduellement variable, grandira presque de même, entraînant dans son accroissement quelques-uns au moins des premiers membres du système (13). C'est bien dire que les valeurs de x, y, z correspondant au minimum considéré *tiendront à peu près le milieu* entre toutes celles qui vérifieraient passablement les équations; et l'on pourra les adopter comme constituant les évaluations les plus *sûres* des inconnues, en vertu du principe de bon sens auquel nous devons la règle des moyennes.

Reste à choisir l'exposant m. On ne peut lui attribuer la valeur 1, car alors la fonction à rendre minimum serait la somme des premiers membres de (13) pris en valeur absolue, somme qui, bien que continue strictement parlant, ne varie pas d'une manière graduelle, ses dérivées en x, y, z croissant brusquement de $\pm 2a$, $\pm 2b$ ou $\pm 2c$ quand un des premiers membres, dont j'écrirai la valeur absolue $\mp(ax + by + cz - d)$, y change de signe ou y devient $\pm(ax + by + cz - d)$, tandis qu'entre deux de ces changements de signe, les mêmes dérivées en x, y, z restent constantes. Il n'y a donc pas, dans une pareille somme, la continuité de variation nécessaire pour que son minimum, supposé même avoir toujours sa situation (x, y, z) bien déterminée, occupe généralement une position à peu près moyenne entre toutes celles des petites valeurs de la fonction. D'ailleurs, dans le cas le plus simple, qui est celui de deux équations seulement de la forme $x - a_1 = 0$, $x - a_2 = 0$, où la règle des moyennes indique pour x la valeur $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ équidistante de a_1 et de a_2, les écarts $x - a_1$, $x - a_2$, dont l'un, $x - a_1$ par exemple, est positif, et l'autre, $x - a_2$, négatif tant que x se trouve compris entre a_1 et a_2, ont alors leur somme absolue $a_2 - a_1$ constante et, par con-

séquent, dépourvue d'un minimum correspondant à une valeur *déterminée* de x.

L'exposant m, qui ne peut ainsi recevoir la valeur 1, devra évidemment être tel, que les équations du minimum soient du premier degré en x, y, z, comme l'est l'équation (12) quand on peut appliquer la règle des moyennes : car il serait peu naturel de faire dépendre d'équations de degré supérieur la résolution approximative d'un système qui n'est que du premier degré ; et, d'ailleurs, un système complet d'équations du premier degré en x, y, z, n'admettant qu'une solution, impliquera le plus simplement possible l'unité du minimum désiré. Or comme, pour toute fonction graduellement variable de x, y, z, les équations du minimum se forment en annulant les dérivées partielles premières de la fonction, la somme absolue des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des premiers membres du système (13) devra être du second degré en x, y, z, si l'on veut que ses dérivées ainsi annulées donnent des équations du premier. Il faudra donc prendre $m = 2$ ou, autrement dit, rendre minimum la somme, graduellement variable,

$$(14)\qquad \begin{cases} (a_1x + b_1y + c_1z - d_1)^2 \\ +(a_2x + b_2y + c_2z - d_2)^2 \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(a_nx + b_ny + c_nz - d_n)^2. \end{cases}$$

Ce minimum existe bien ; car l'expression essentiellement positive (14) grandit indéfiniment quand une ou plusieurs des variables x, y, z deviennent infinies positives ou négatives, et elle a nécessairement, dans l'intervalle, une valeur inférieure aux autres, pour laquelle s'annulent ses dérivées premières en x, y, z. Celles-ci étant respectivement

$$\begin{gathered} 2(a_1x + b_1y + c_1z - d_1)a_1 + \ldots, \\ 2(a_1x + b_1y + c_1z - d_1)b_1 + \ldots, \\ 2(a_1x + b_1y + c_1z - d_1)c_1 + \ldots, \end{gathered}$$

il vient comme équations du minimum, entre les inconnues en même nombre x, y, z, le système du premier degré

$$(15)\qquad \begin{cases} (\Sigma a^2)x + (\Sigma ab)y + (\Sigma ac)z = \Sigma ad, \\ (\Sigma ba)x + (\Sigma b^2)y + (\Sigma bc)z = \Sigma bd, \\ (\Sigma ca)x + (\Sigma cb)y + (\Sigma c^2)z = \Sigma cd, \end{cases}$$

où Σa^2, Σab, etc. désignent, conformément à une notation abrégée très ordinaire, les sommes respectives $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, etc.

Telles sont les combinaisons, dites *équations normales*, qu'on formera avec les relations proposées (13), pour obtenir, en quelque sorte, les moyennes x, y, z de toutes les valeurs vérifiant assez bien celles-ci : ces combinaisons résultent, on le voit, de l'addition des équations (13) respectivement multipliées soit par les coefficients a_1, a_2, ..., a_n de x, soit par ceux, b_1, b_2, ..., b_n, de y, etc.

Comme les premiers membres de (13) expriment, pour des valeurs quelconques de x, y, z, les erreurs correspondantes avec lesquelles sont vérifiées ces équations, la somme (14) de leurs carrés est dite la *somme des carrés des erreurs*. Aussi le mode approximatif indiqué de résolution d'un système incompatible, où l'on rend cette somme minimum, est-il appelé *méthode des moindres carrés des erreurs*. Il a été perfectionné par Gauss; mais Legendre, le premier, l'a trouvé et a remarqué que la règle des moyennes, d'après laquelle on substitue l'équation (12) au système (11), revenait à rendre minimum la somme $(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ des carrés des premiers membres, par l'annulation de sa dérivée en x, $2(x-a_1)+2(x-a_2)+\ldots+2(x-a_n)$; ce qui lui suggéra sans doute l'idée d'en faire autant dans le cas d'équations quelconques.

On voit, par cette remarque de Legendre, que la méthode des moindres carrés comprend comme cas particulier la règle des moyennes, ou que, dans le cas simple auquel répond cette règle, elle donne, non pas à peu près (comme on avait le droit de s'y attendre), mais exactement, le même *milieu* qu'elle entre plusieurs observations; de sorte qu'on peut la regarder comme en étant la généralisation naturelle.

Malheureusement, son emploi est d'ordinaire très laborieux, à cause des multiplications nombreuses qu'exige le calcul des coefficients Σa^2, Σab, etc., figurant dans les équations normales. Aussi convient-il de n'aborder ce long et aride calcul qu'après avoir reconnu, par de simples constructions graphiques permettant de saisir d'un coup d'œil l'ensemble des résultats observés, si ces résultats sont assez concordants pour qu'on puisse regarder les observations comme suffisantes, et si les formules qu'on se propose d'appliquer les reproduisent à fort peu près. Dans ce but, ne faisant changer à la fois qu'une des variables indépendantes choisies, on porte, à partir d'une origine, ses diverses valeurs constatées, sur un axe horizontal des abscisses et, à la suite, on mène verticalement des ordonnées égales aux valeurs correspondantes, aussi observées, de la fonction. Chaque observation étant ainsi représentée sur le plan par l'extrémité d'une ordonnée, l'ensemble des points obtenus pour exprimer les observations rela-

tives au changement de la variable en question, couvrira, si elles sont bien faites et très nombreuses, une étroite bande, le long de laquelle on tracera, en se maintenant à égale distance de ses deux bords, la courbe empirique représentative du phénomène; et c'est seulement dans le cas où cette courbe sera exprimée passablement bien par une relation théorique simple entre ses deux coordonnées, qu'on adoptera celle-ci comme loi du phénomène, en déterminant alors ses paramètres, pour plus de précision, par la méthode des moindres carrés.

Le plus souvent, quand la fonction à évaluer représente une quantité physique variable dans de très larges limites, les petites erreurs qu'il est permis d'y commettre, et que l'on commet effectivement en la mesurant, sont proportionnées à ses valeurs. Ce qu'il importe de réduire autant que possible, c'est donc le rapport de chaque erreur à la fonction même : autrement dit, il faudra disposer préalablement les équations (13) de manière que leurs premiers membres expriment, au point de vue concret, des erreurs *relatives* et non des erreurs *absolues*. On y parviendra, soit en se donnant comme fonction à évaluer le logarithme de la quantité physique et non cette quantité même, logarithme sur lequel une petite erreur ε correspond à la multiplication de la quantité physique par $e^\varepsilon =$ (sensiblement) $1+\varepsilon$, ou à une erreur relative (et non plus absolue) ε en ce qui concerne cette quantité, soit plus simplement, si la quantité physique dont il s'agit est, par exemple, celle que désignent les lettres $d_1, d_2, \ldots, d_n$ des équations (13), en divisant respectivement ces équations par $d_1, d_2, \ldots, d_n$, avant de leur appliquer la méthode des moindres carrés.

107*. — Exemple de minima obtenus, dans une fonction de deux variables, sans qu'on ait besoin de calculer celles-ci.

Voici, pour le cas de deux variables indépendantes x et y, un exemple important et assez étendu, dans lequel les valeurs maxima ou minima de la fonction peuvent se calculer sans qu'on ait besoin de résoudre les équations correspondantes en x et y.

Imaginons, sur tout le plan horizontal de deux coordonnées rectangulaires x et y, une fonction de point $\varphi = F(x, y)$, partout continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et dont le paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2\varphi$ soit identiquement nul. Pour abréger, nous appellerons τ sa dérivée seconde oblique $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$ et $\rho, -\rho$ ses deux dérivées secondes directes $\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dy^2}$, qui ont leur

somme $\Delta_2\varphi$ égale à zéro par hypothèse et leurs deux dérivées respectives en y et en x, $\frac{d\rho}{dy}$, $-\frac{d\rho}{dx}$, évidemment identiques à celles de σ en x et en y. Considérons le carré, $\Delta_1^2\varphi = \frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2}$, de son paramètre différentiel du premier ordre en un point quelconque (x, y) du plan, et imaginons qu'on y élève verticalement une ordonnée z égale à la moitié, $\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi$, de ce carré. Nous aurons ainsi la fonction, essentiellement positive,

$$(16) \qquad z \quad \text{ou} \quad f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2}\right),$$

dont il s'agit de trouver les maxima et les minima. Des différentiations immédiates donnent pour ses dérivées partielles premières et secondes p, q, r, s, t, en se rappelant les notations ρ, σ, $-\rho$ des dérivées secondes de φ, ainsi que l'expression des deux dérivées premières de σ au moyen de celles de ρ :

$$(17) \qquad \begin{cases} p = \frac{d\varphi}{dx}\rho + \frac{d\varphi}{dy}\sigma, \\ q = \frac{d\varphi}{dx}\sigma - \frac{d\varphi}{dy}\rho, \\ r = (\rho^2 + \sigma^2) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\rho}{dy}\right), \\ s = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\rho}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\rho}{dx}, \\ t = (\sigma^2 + \rho^2) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\rho}{dy}\right). \end{cases}$$

Une double application de l'identité connue

$$(aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

en déduit de suite

$$(18) \qquad \begin{cases} p^2 + q^2 = \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)(\rho^2 + \sigma^2), \\ rt - s^2 = (\rho^2 + \sigma^2)^2 - \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2}\right)\left(\frac{d\rho^2}{dx^2} + \frac{d\rho^2}{dy^2}\right), \end{cases}$$

ou bien, par la substitution de $2z$, d'après (16), à la somme des carrés des deux dérivées premières de φ et par celle de $\Delta_1^2\rho + \Delta_1^2\sigma$ à $2\Delta_1^2\rho$ (que rend possible l'égalité des dérivées premières de σ en x et y à celles de ρ en y et de $-\rho$ en x),

$$(19) \qquad p^2 + q^2 = 2z(\rho^2 + \sigma^2), \qquad rt - s^2 = (\rho^2 + \sigma^2)^2 - z(\Delta_1^2\rho + \Delta_1^2\sigma).$$

La pente de la surface étant supposée bien continue, nous devons en premier lieu, d'après le principe de Fermat, annuler la somme p^2+q^2; ce qui, vu sa valeur (19), ne se peut qu'en posant soit $z=0$, soit $z>0$; mais, alors, $\rho^2+\sigma^2=0$. L'hypothèse $z=0$ donne évidemment des minima de l'ordonnée essentiellement positive z, pourvu que celle-ci ne reste pas nulle indéfiniment tout autour, mais qu'elle augmente au sortir de régions limitées en tous sens. Quant à l'hypothèse multiple $z>0$, $\rho^2+\sigma^2=0$, elle rend l'expression (19) de $rt-s^2$ égale à $-z(\Delta_1^2\rho+\Delta_1^2\sigma)$, c'est-à-dire négative pourvu que $\Delta_1\rho$ et $\Delta_1\sigma$ ne soient pas nuls; et, d'après la condition (10) [p. 175], il ne se produit alors ni maximum ni minimum de z.

Reste à examiner la supposition tout exceptionnelle, dont nous avons fait abstraction dans la théorie générale, où cette double hypothèse $z>0$, $\rho^2+\sigma^2=0$ donnerait $rt-s^2=0$, par suite de l'annulation simultanée de $\Delta_1\rho$ et de $\Delta_1\sigma$; ce qui entraînerait celle de toutes les dérivées tant secondes que troisièmes de φ, et des cinq dérivées premières et secondes p, q, r, s, t de z, soit en un seul point, soit sur une certaine étendue, définie par la région de contact de la surface $z=\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi$ avec son plan tangent horizontal correspondant. A des distances infiniment petites tout autour de cette région de contact, l'ordonnée z se mettant à varier, la pente $\sqrt{p^2+q^2}$ de la surface et, par suite, d'après la première (19), la somme $\rho^2+\sigma^2$ cesseraient d'être nulles, ainsi que les deux paramètres égaux $\Delta_1\rho$, $\Delta_1\sigma$, qui mesurent la rapidité des changements respectifs de ρ, σ dans les sens normaux aux courbes $\rho=$const., $\sigma=$const. Et, d'ailleurs, ρ, σ, tout au plus comparables aux produits des valeurs actuelles déjà accrues, $\Delta_1\rho$, $\Delta_1\sigma$, de leurs rapidités de variation, par les distances infiniment petites parcourues depuis la sortie de la région de contact, ne pourraient manquer d'être d'un ordre de petitesse supérieur à celui de $\Delta_1\rho$ ou $\Delta_1\sigma$; en sorte que $\rho^2+\sigma^2$ et, à plus forte raison, $(\rho^2+\sigma^2)^2$ seraient négligeables en comparaison de $\Delta_1^2\rho+\Delta_1^2\sigma$, ou de $z(\Delta_1^2\rho+\Delta_1^2\sigma)$. Par suite, tout autour soit du point, soit de la région où ρ, σ, $\Delta_1\rho$, $\Delta_1\sigma$, p, q, r, s, t s'annuleraient, la différence $rt-s^2$ cesserait, d'après la seconde formule (19), d'être nulle, pour y devenir essentiellement négative.

Or il suit de là, comme on va voir, que la surface $z=\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi$ ne pourrait pas se relever tout autour de sa région de contact avec son plan tangent horizontal, ou s'y abaisser tout autour, et que, par conséquent, l'ensemble des ordonnées z correspondant à cette région ne serait pas entouré d'autres ordonnées toutes plus grandes ou toutes plus petites, bref, ne constituerait ni un minimum, ni un maximum.

Si, en effet, la surface se relevait ou s'abaissait tout autour de la

région de contact supposée, ses pentes y étant continues, son plan tangent actuellement horizontal (censé pour un instant mobile) n'aurait qu'à y tourner infiniment peu autour d'une de ses droites presque tangente, mais entièrement extérieure à la région de contact, pour se détacher de la surface sur toute l'étendue de cette région et venir presque aussitôt la toucher en un point voisin, situé de l'autre côté de la droite, c'est-à-dire du côté où le plan, dans son mouvement, se serait approché de la surface, qui, à ces endroits, n'en aurait été éloignée d'abord qu'extrêmement peu.

C'est dire que, en certains au moins des points, très voisins de la région de contact primitive, où les trois dérivées secondes r, s, t ne seraient plus nulles, la surface $z=f(x,y)$ se trouverait entièrement, jusqu'à des distances infiniment petites tout autour, d'un même côté de son plan tangent mené en ces points, ou, autrement dit, que les coupes de la surface par des plans verticaux s'y croisant seraient toutes au-dessus ou toutes au-dessous de leurs tangentes relatives aux mêmes points et situées sur ces plans tangents. Dans de telles conditions, une quelconque de ces coupes étant supposée parcourue en s'élevant ou en s'abaissant suivant qu'elles seraient au-dessus ou au-dessous de leurs tangentes, sa pente, prise en valeur absolue, se trouverait, évidemment, d'abord plus faible que celle de la tangente considérée, et puis moins faible une fois le point de contact passé, puisque sa distance verticale à la tangente irait d'abord en diminuant jusqu'à zéro, pour augmenter ensuite. Quel que fût le cas, la pente absolue de la courbe grandirait, ou varierait d'un bout à l'autre dans un même sens; et sa dérivée, par rapport à une abscisse rectiligne l comptée le long de la projection de la courbe sur le plan des xy, aurait le même signe pour toutes les coupes se croisant au point de contact considéré.

D'ailleurs, les deux coordonnées x et y, aux divers points de cette projection, seraient évidemment liées à l par deux relations de la forme $x=x_0+\mathrm{H}l$, $y=y_0+\mathrm{K}l$, H et K désignant deux coefficients constants dont le rapport définirait la direction du plan de la coupe, et x_0, y_0 étant les deux coordonnées de l'origine des abscisses l. Telles seraient les expressions de x et y, fonctions linéaires de l, à substituer dans la valeur $z=f(x,y)$ de l'ordonnée verticale z de la courbe; moyennant quoi la dérivée première de z en l serait la pente de cette courbe et, sa dérivée seconde $\frac{d^2z}{dl^2}$, la dérivée (de cette pente) qui, au point considéré (x,y), devrait garder constamment le même signe quel que fût le rapport de H à K. Or cette dérivée seconde ayant évidemment l'expression $r\mathrm{H}^2+2s\mathrm{HK}+t\mathrm{K}^2$, la conservation de son

signe reviendrait, comme on a vu par la formule (10) [p. 175], à poser

$$(20)\qquad rt - s^2 > 0,$$

relation où le signe $>$ n'exclurait cependant pas d'une manière absolue l'égalité. Ainsi, un maximum ou minimum ne serait possible, dans les conditions étudiées, qu'autant que la différence $rt - s^2$ cesserait d'être négative sur une partie au moins de l'espace entourant ce que nous appelons la *région de contact*. Donc, comme elle y prend partout le signe $-$, l'hypothèse $z > 0$ et $\rho^2 + s^2 = 0$ ne peut, en aucun cas, donner ni maximum, ni minimum.

En résumé, la fonction considérée $z = \frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi$ ne comporte pas d'autres valeurs maxima ou minima que des minima nuls, même en comprenant dans cette double dénomination des valeurs voisines, en nombre infini, qui seraient égales entre elles et entourées d'autres valeurs toutes plus petites ou toutes plus grandes.

Les valeurs de x et de y rendant z minimum ne pourraient s'obtenir qu'en résolvant avec plus ou moins de peine le système des deux équations $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, auxquelles équivaut la condition trouvée $z = 0$, $\Delta_1^2\varphi = 0$. Mais l'existence effective d'au moins un minimum se démontre sans difficulté dans le cas relativement simple où la fonction φ est rationnelle en x et en y, c'est-à-dire se réduit à un polynôme, pourvu toutefois que ses dérivées premières soient variables ou que son degré dépasse le premier; et il en résulte cette conséquence importante, que les deux équations simultanées, susceptibles encore d'être fort complexes, $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, y admettent certainement une solution, ou sont vérifiées par un système de valeurs de x et de y.

Pour démontrer alors le fait de l'existence soit d'une ordonnée, soit d'un groupe d'ordonnées z, moindres que toutes celles qui les entourent, il suffit évidemment de faire voir que la fonction z, finie et continue pour toutes les valeurs finies de x et de y, grandit sans limite quand on s'éloigne indéfiniment de l'origine dans quelque sens que ce soit.

A cet effet, considérons en particulier, dans le polynôme φ (supposé être au moins du second degré, comme on vient de dire), l'ensemble des termes du degré le plus élevé, ensemble dont les dérivées premières en x et y, fonctions homogènes d'un même degré n, seront aussi les parties les plus élevées de $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ et donneront également, par la demi-somme de leurs carrés, la partie de z dont le degré, $2n$, sera le plus haut. La relation $\Delta_2\varphi = 0$ ne cessera pas d'être vraie quand

on réduira provisoirement φ à cet ensemble de termes; car, quel que puisse être un polynôme φ, l'expression $\Delta_2\varphi$ ou $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ est un nouveau polynôme, qu'on peut se représenter, par exemple, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, et dont l'annulation pour toutes les valeurs de x exige, comme on l'a vu (p. 69), l'égalité à zéro de chaque coefficient, formé lui-même de parties en y où les coefficients numériques totaux de différentes puissances de y devront, pour une raison analogue, être nuls. Il y aura, par conséquent, dans la somme $\Delta_2\varphi$, annulation séparée de chaque groupe de termes d'un même degré, paramètre différentiel Δ_2 du groupe de termes de φ dont le degré dépasse le sien de deux unités; et si, pour un instant, on borne φ au groupe le plus élevé, rien n'empêchera de continuer de même à appeler, non seulement σ sa dérivée seconde oblique en x et y, mais aussi ρ et $-\rho$ ses deux dérivées secondes directes, l'une, en x, l'autre, en y.

Alors le théorème d'Euler (p. 124*), appliqué aux fonctions ainsi réduites $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, homogènes du degré n et dont les dérivées premières sont respectivement ρ, σ et σ, $-\rho$, donnera

$$(21)\qquad \frac{d\varphi}{dx}=\frac{\rho x+\sigma y}{n},\qquad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{\sigma x-\rho y}{n}.$$

Par suite, les valeurs (17) de p, q deviendront

$$(22)\qquad p \text{ ou } \frac{dz}{dx}=\frac{\rho^2+\sigma^2}{n}x,\qquad q \text{ ou } \frac{dz}{dy}=\frac{\rho^2+\sigma^2}{n}y;$$

et, d'un point quelconque (x, y) à tout point infiniment voisin $(x+dx, y+dy)$, la fonction z, ainsi bornée à ses termes du degré $2n$, croîtra de

$$(23)\qquad dz=p\,dx+q\,dy=\frac{\rho^2+\sigma^2}{2n}\,d(x^2+y^2).$$

On aura donc $dz=0$, ou $z=\text{const.}$, en posant $d(x^2+y^2)=0$ ou $x^2+y^2=\text{const.}$ C'est dire que, dans la fonction z, l'ensemble des termes du degré le plus élevé $2n$, demi-somme des carrés des parties les plus hautes des deux fonctions $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, reste invariable quand la distance $r=\sqrt{x^2+y^2}$ à l'axe des z ne change pas; et, si l'on représente par $Ax^{2n}=Ar^{2n}$ le terme unique auquel cet ensemble se réduit pour $y=0$, son expression générale sera $Ar^{2n}=A(x^2+y^2)^n$. Or les autres termes de z, de degrés en x et en y inférieurs à $2n$, seraient

tout au plus, aux grandes distances r, de l'ordre de r^{2n-1} et deviendraient, par conséquent, pour r assez grand, négligeables en comparaison du premier terme Ar^{2n}. Celui-ci grandissant indéfiniment, puisque n est supposé dépasser zéro, on voit que la surface continue proposée $z = \frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi$, située en entier au-dessus du plan des xy, s'élève sans limite tout autour de l'origine, aux grandes distances; d'où résulte bien l'existence, aux distances finies, d'une ordonnée ou d'un groupe d'ordonnées inférieures à celles qui les environnent et, par suite, nulles, comme on a vu.

Le raisonnement précédent s'applique d'ailleurs sans que le nombre n ait besoin d'être entier ou la fonction φ d'être rationnelle ni même algébrique : il suffit que cette fonction φ soit partout continue avec ses dérivées des deux premiers ordres, et qu'elle se décompose, aux distances considérables de l'origine, en deux parties, dont la principale ait son paramètre différentiel Δ_2 nul, comme celui de la fonction complète, et soit homogène d'un degré $1 + n$ supérieur à l'unité. Dans ces conditions, la surface $z = \frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi$ se relèvera indéfiniment tout autour de l'origine aux distances infinies : il y aura donc, aux distances finies, au moins une ordonnée z minimum ou égale à zéro ; et les valeurs correspondantes de x et y constitueront une solution du système $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$.

108*. — Application à la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre.

Le fait de l'existence d'au moins une solution finie des équations $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, dans tous les cas où φ est une fonction entière de x et de y ayant ses dérivées premières variables et son paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2\varphi$ identiquement nul, conduit très facilement à la démonstration de ce principe fondamental de l'Algèbre, que tout polynôme $f(u)$, fonction d'une seule variable u, admet un facteur réel du premier ou du second degré en u et peut être, par suite, décomposé en facteurs de ces deux sortes.

Pour le faire voir, rappelons d'abord que, s'il existe une valeur de u, a par exemple, annulant $f(u)$, ce polynôme sera divisible exactement par le facteur du premier degré $u - a$. Nous pouvons donc nous borner au cas où $f(u)$ ne s'annule pour aucune valeur (réelle) de u, et nous contenter de démontrer qu'il existe alors une expression du second degré, de la forme $(u - x)^2 + y^2$, par laquelle $f(u)$ peut être divisé sans reste, si l'on attribue aux deux inconnues x et y des valeurs convenables.

Dans ce but, ordonnons les deux expressions $f(u)$ et $(u-x)^2+y^2$ suivant les puissances décroissantes de u, et divisons la première par la seconde. Le diviseur monôme employé dans chaque division partielle étant simplement u^2, nous obtiendrons ainsi pour quotient un certain polynôme Q, entier en u, x, y, et pour reste une fonction analogue, mais seulement du premier degré en u, que nous pourrons, en appelant M et N deux polynômes en x et y, écrire $\mathrm{M}(u-x)+\mathrm{N}$. On aura donc

$$(24)\qquad f(u) = \mathrm{Q}[(u-x)^2+y^2] + \mathrm{M}(u-x) + \mathrm{N}.$$

Il reste à savoir si x et y peuvent être choisis de manière à annuler tout à la fois M et N; et, pour cela, il nous faut chercher quelque propriété de M et N capable de nous éclairer sur l'existence d'une solution des deux équations $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{N}=0$.

Faisons d'abord, dans (24), $u=x$; et il viendra déjà, en représentant par $-\sum \mathrm{C}x^\alpha y^\beta$ le polynôme en x et y auquel se réduit alors Q,

$$f(x) = -(\sum \mathrm{C}x^\alpha y^\beta)y^2 + \mathrm{N}$$

ou bien

$$(25)\qquad \mathrm{N} = f(x) + y^2\sum \mathrm{C}x^\alpha y^\beta = \frac{d}{dy}\left[yf(x) + \sum \frac{\mathrm{C}}{\beta+3}x^\alpha y^{\beta+3}\right],$$

relation dont les deux premiers membres comparés nous apprennent que, dans tout système de valeurs de x et de y annulant N, la variable y ne sera jamais nulle, l'hypothèse $y=0$ donnant simplement $\mathrm{N}=f(x)$, quantité essentiellement différente de zéro par hypothèse.

Mais différentions l'identité (24) en x et en y sans faire varier u. Nous aurons

$$(26)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d\mathrm{Q}}{dx}[(u-x)^2+y^2] - 2\mathrm{Q}(u-x) + \dfrac{d\mathrm{M}}{dx}(u-x) - \mathrm{M} + \dfrac{d\mathrm{N}}{dx}, \\ 0 = \dfrac{d\mathrm{Q}}{dy}[(u-x)^2+y^2] + 2\mathrm{Q}y + \dfrac{d\mathrm{M}}{dy}(u-x) + \dfrac{d\mathrm{N}}{dy}. \end{cases}$$

Éliminons Q, en ajoutant ces deux équations après les avoir respectivement multipliées par y, $u-x$ et avoir remplacé, dans la deuxième, le terme $\frac{d\mathrm{M}}{dy}(u-x)^2$ par l'expression $\frac{d\mathrm{M}}{dy}[(u-x)^2+y^2] - y^2\frac{d\mathrm{M}}{dy}$, afin de n'avoir qu'un seul terme du résultat où figurent $(u-x)^2$ et les dérivées partielles de Q. Si, pour abréger, on appelle P le polynôme, en u, x et y,

$$\mathrm{P} = y\frac{d\mathrm{Q}}{dx} + (u-x)\frac{d\mathrm{Q}}{dy} + \frac{d\mathrm{M}}{dy},$$

qui sera multiplié dans le résultat par $(u-x)^2+y^2$, et si l'on observe en outre que $y\dfrac{dM}{dx}$, $-y\dfrac{dM}{dy}-M$ peuvent s'écrire aussi, respectivement, $\dfrac{dMy}{dx}$, $-\dfrac{dMy}{dy}$, il viendra la nouvelle identité

$$(27)\quad o = P[(u-x)^2+y^2] + \left(\frac{dMy}{dx}+\frac{dN}{dy}\right)(u-x) - y\left(\frac{dMy}{dy}-\frac{dN}{dx}\right).$$

Le second membre de (27), ordonné suivant les puissances décroissantes de u, aura donc tous ses coefficients nuls. Or il suit d'abord de là que le polynôme appelé P se réduit identiquement à zéro ; sans quoi son terme le plus élevé en u, multiplié par le premier terme u^2 du facteur $(u-x)^2+y^2$, donnerait le terme le plus élevé de ce second membre, terme, du deuxième degré au moins, que ne pourraient détruire les deux dernières parties de (27) dont le degré en u est, soit 1, soit zéro. Ainsi l'identité (27) donne d'abord $P=o$. Ensuite l'annulation, dans (27), du terme en u subsistant revient à poser

$$(28)\qquad \frac{dMy}{dx}+\frac{dN}{dy}=o$$

et réduit enfin l'identité (27) à

$$(29)\qquad \frac{dMy}{dy}-\frac{dN}{dx}=o,$$

ou, d'après la dernière valeur (25) de N, à

$$(30)\qquad \frac{d}{dy}\left\{My-\frac{d}{dx}\left[yf(x)+\sum\frac{C}{\beta+3}x^{\alpha}y^{\beta+3}\right]\right\}=o.$$

L'égalité (30), exprimant que le polynôme entre accolades My — etc. a sa dérivée par rapport à y nulle, signifie que ce polynôme ne dépend pas de y, ou qu'on peut, sans changer sa valeur, y faire $y=o$. Et comme tous ses termes contiennent y en facteur, il est identiquement nul. Ainsi, l'identité (30) équivaut à écrire

$$(31)\qquad My-\frac{d}{dx}\left[yf(x)+\sum\frac{C}{\beta+3}x^{\alpha}y^{\beta+3}\right]=o.$$

Appelons, pour abréger, φ le polynôme

$$(32)\qquad \varphi=yf(x)+\sum\frac{C}{\beta+3}x^{\alpha}y^{\beta+3},$$

et les formules (31), (25) donneront enfin les expressions cherchées de M et N :

$$(33)\qquad M=\frac{1}{y}\frac{d\varphi}{dx},\qquad N=\frac{d\varphi}{dy}.$$

D'ailleurs, le polynôme φ sera bien dans les conditions de la fonction entière de ce nom que nous avons considérée précédemment; car, d'une part, l'identité (28), si l'on y remplace M et N par leurs valeurs (33), deviendra $\Delta_2\varphi = 0$; et, d'autre part, ce polynôme φ aura pour dérivées premières en x et y des quantités variables, ou sera d'un degré supérieur au premier, sa partie $yf(x)$ étant au moins du troisième degré dès que $f(x)$ atteint ou dépasse le second (comme on le suppose), et, de plus, cette partie, du premier degré en y, ne pouvant se réduire avec la suivante, $\sum \frac{C}{\beta+3} x^\alpha y^{\beta+3}$, affectée pour le moins de y^3 (¹). Ainsi, il existera un système de valeurs de x et de y annulant à la fois $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$ ou N; et comme, d'après une remarque faite à la suite de la formule (25), y y différera de zéro, la première relation (33) donnera alors $M = 0$. Si donc on adopte ce système de valeurs de x et de y, M et N s'annulant, la formule (24) montre que $(u-x)^2+y^2$ sera bien un facteur du polynôme proposé $f(u)$.

Le facteur $(u-x)^2+y^2$ est d'ailleurs irréductible ou ne peut être divisé par aucun binôme linéaire de la forme $u-a$; car celui-ci, en s'annulant pour $u=a$, le ferait annuler lui-même, alors que sa plus petite valeur y^2, atteinte pour $u=x$, est supérieure à zéro.

Tout polynôme proposé $f(u)$ pourra, par conséquent, de proche en proche, être décomposé en facteurs irréductibles du premier ou du second degré; et, d'ailleurs, cette décomposition ne se fera jamais que d'une seule manière, ou amènera inévitablement les mêmes facteurs quels que soient ceux par lesquels on commencera, comme le prouve une démonstration algébrique basée sur la théorie du plus grand commun diviseur de deux polynômes et toute pareille à la démonstration arithmétique du théorème analogue concernant la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

(¹) On voit, du reste, aisément, que cette somme Σ est tout au plus du degré $n+1$ de l'expressoin $yf(x)$, n étant celui de $f(x)$. En effet, le mécanisme de la division de $f(u)$ par le polynôme $(u-x)^2+y^2$ homogène en u, x et y, amène constamment, dans les multiplications de ce diviseur par le terme obtenu au quotient, des produits dont chaque partie affectée d'une puissance différente de u est du degré n en u, x et y; d'où il suit : 1° que le quotient Q est du degré $n-2$ en u, x, y, et reste, par suite, tout au plus de ce degré en x et y quand on pose $u=x$; 2° que le reste $M(u-x)+N$ est également du degré n dans ses deux parties Mu, $N-Mx$, et que, par conséquent, M est du degré $n-1$ en x et y, ou My du degré n. Quant à N, le second membre de (25) montre qu'il est, comme My, du degré n en x et y.

COMPLÉMENT A LA DOUZIÈME LEÇON.

POINTS D'INFLEXION ET POINTS SINGULIERS D'UNE FAMILLE DE COURBES; CARACTÈRES DES DISCONTINUITÉS QU'ADMETTENT LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

117*. — Lieu des points d'inflexion d'une famille de courbes.

D'après cela, si une famille de courbes est représentée par une équation de la forme $F(x, y) = c$, où la fonction F sera supposée bien déterminée, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles premières et secondes, pour toutes les valeurs finies de x et y, il sera aisé de trouver le lieu de leurs points d'inflexion. En appelant respectivement, suivant notre usage, p, q, r, s, t les cinq dérivées partielles premières et secondes de F en x et y, les formules du n° 56 (p. 111) donneront en effet, pour y calculer y' et y'', les deux équations

$$(5) \qquad p + qy' = 0, \qquad r + 2sy' + ty'^2 + qy'' = 0;$$

d'où l'on déduit aisément, par l'élimination de y',

$$(6) \qquad q^2 r - 2qps + p^2 t + q^3 y'' = 0.$$

Faisons d'abord abstraction : 1° des points d'inflexion pour lesquels le coefficient angulaire y' de la tangente deviendrait infini, points où nous savons que les contacts ne peuvent être étudiés avec l'axe des y choisi; et, 2°, de ceux où p, q s'annuleraient à la fois. La première formule (5) montre que la dérivée q ne peut se réduire à zéro en aucun des autres points du plan, son annulation pour y' fini entraînant celle de p; et il résulte alors de (6) que la condition $y'' = 0$, caractéristique des points cherchés, revient exactement à poser

$$(7) \qquad q^2 r - 2qps + p^2 t = 0.$$

Or cette équation en x et y, où p et q d'une part, r et t d'autre part, entrent symétriquement comme la dérivée seconde oblique s, resterait la même si, pour tenir compte des points où y' devient infini, on faisait de l'ordonnée y la variable indépendante et de l'abscisse correspondante x des courbes la fonction. De plus, elle est satisfaite identi-

quement aux autres points qui avaient été exceptés, savoir à ceux où l'on a $p = 0$, $q = 0$; de sorte que, si certains de ces points très exceptionnels répondaient à la question, elle les donnerait. Donc, et sauf discussion pour exclure ceux d'entre ces derniers où y'' ne s'annulerait pas, l'équation (7) définit, sur le plan des xy, le lieu des points d'inflexion cherchés ou, plus exactement, de tous ceux où s'annule *la courbure des lignes de la famille* $F(x, y) = c$. C'est ce qu'indiquait déjà, dans l'hypothèse d'axes rectangulaires, l'équation (23 *bis*) du n° 57* [p. 69*] identique de forme à (7).

Comme il arrive fréquemment que deux courbes d'un même plan se coupent, il ne sera pas rare qu'il y ait un ou plusieurs points communs à la ligne exprimée par l'équation (7) et à l'une des courbes $F(x, y) = c$, choisie au hasard : ce seront les points d'inflexion de cette dernière. Ainsi, les courbes présentant des points d'inflexion n'ont rien d'extraordinaire; et ces points ne doivent pas être assimilés aux *points singuliers* (vérifiant les deux équations $p = 0$, $q = 0$) dont il a été parlé dans une Leçon antérieure (p. 48*).

118*. — Des singularités les plus fréquentes dans les courbes planes : points isolés; points doubles.

Mais c'est justement ici le lieu de signaler les principales variétés de ces points singuliers; car, étudiant les rapports d'une courbe avec ses tangentes, ou, par conséquent, le fait de la ressemblance de toute courbe à une droite sur une longueur infiniment petite de part et d'autre de chacun de ses points, il est naturel de chercher à se rendre compte, du moins pour les lignes comportant une définition analytique, de la manière dont ce fait, qui constitue la véritable continuité de la courbe, peut quelquefois, en certains points, ne pas se produire, ou plutôt subir certaines altérations.

Bornons-nous, dans la partie générale de cette étude, aux lignes que représente une équation de la forme $F(x, y) = c$, où nous admettons, comme tout à l'heure, que la fonction F soit partout bien déterminée, finie et continue, avec ses dérivées partielles des deux premiers ordres p, q, r, s, t. Pour fixer les idées, nous figurerons cette fonction par l'ordonnée verticale $z = c$ d'une surface s'étendant au-dessus ou au-dessous du plan supposé horizontal des xy; et les diverses courbes de la famille seront les lieux des points de ce plan d'où partiront des ordonnées se terminant à la même hauteur. D'après ce qu'on a vu au n° 40 (p. 48*), les seuls points qui puissent être singuliers satisferont aux deux équations $p = 0$, $q = 0$, ou seront de

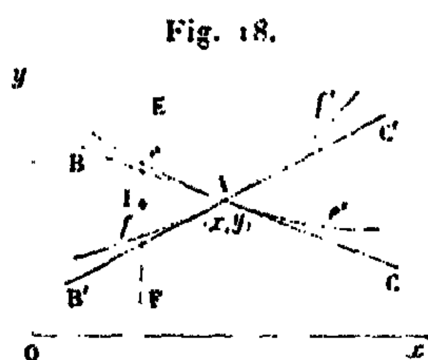
ceux pour lesquels, la pente de la surface étant nulle, il y a lieu également de se demander si l'ordonnée $z = c$ n'y deviendrait pas maxima ou minima.

Soit donc (x, y) l'un de ces points, où passe une courbe $F(x, y) = c$ dont nous voulons connaître dans tout le voisinage la forme, en relation étroite avec celle même de la surface autour de l'ordonnée $z = c$; et supposons d'abord, comme il arrive d'ordinaire, que les dérivées partielles secondes r, s, t ne s'annulent pas, du moins toutes les trois, en ce point (x, y). Alors on y aura soit $rt - s^2 > 0$, soit $rt - s^2 < 0$, soit enfin $rt - s^2 = 0$.

Dans le premier cas, nous savons (p. 175) que la valeur c de la fonction F au point (x, y) sera maxima ou minima et, par conséquent, ne se présentera plus dans le voisinage. Ainsi, la courbe $F(x, y) = c$, passant par le point considéré (x, y), s'y réduit à ce seul point, comme une ellipse à son centre quand les demi-axes sont infiniment petits, et ses autres points ou même ses rameaux de longueur finie, supposé qu'elle en ait quelque part ailleurs, sont entièrement séparés du point (x, y). Voilà pourquoi celui-ci est dit *isolé*. On l'appelle encore *point conjugué* quand il ne constitue pas à lui seul toute la courbe $F(x, y) = c$ et qu'on doit, par conséquent, bien qu'à distance, l'associer à d'autres, non singuliers ou singuliers.

Dans le second cas, où la différence $rt - s^2$ est négative, concevons que l'on parcoure, sur la surface $z = F(x, y)$, les lignes ayant pour projections, sur le plan des xy, des droites d'une orientation quelconque voisines du point considéré $A(x, y)$, et représentées par des équations linéaires de la forme $x = x_0 + Hl$, $y = y_0 + Kl$, où l est une abscisse rectiligne comptée suivant leur longueur à partir d'un quelconque (x_0, y_0) de leurs points. La dérivée première en l de $z = F(x, y)$, pente de la ligne considérée, aura évidemment pour expression $pH + qK$ et, nulle au point A où $p^2 + q^2 = 0$, elle sera infiniment petite très près de ce point, quelle que soit, en projection sur le plan des xy, l'orientation du chemin suivi, définie par le rapport $\frac{K}{H}$ ou $\frac{dy}{dx}$, que je peux appeler simplement y'. Mais la dérivée en l de cette pente, savoir

Fig. 18.



$$\frac{d^2 z}{dl^2} = rH^2 + 2sHK + tK^2 = H^2(r + 2sy' + ty'^2),$$

ne s'annulera au point A que pour les droites, BC, B'C', correspondant aux deux racines, réelles et inégales d'après l'hypothèse $rt-s^2<0$, de l'équation du second degré $r+2sy'+ty'^2=0$. Si y' grandit de $-\infty$ à ∞, ou si l'on considère successivement des droites menées par le point A dans tous les azimuts possibles, le trinôme $r+2sy'+ty'^2$, qui donne son signe à la dérivée seconde de z par rapport à l, en changera à l'instant où y' atteindra la valeur correspondant à l'une des deux droites BC, B'C', valeur toujours finie pour au moins une d'elles; et, par conséquent, la dérivée seconde de z en l, au point A, sera positive pour toutes les directions comprises dans deux, opposés, des quatre angles formés par BC, B'C', négative pour les autres.

Soient, par exemple, BAB', CAC' les deux angles où elle est positive, BAC', CAB' ceux où elle est négative. L'ordonnée $z=c$ menée au point A sera, par suite, minima sur toutes les coupes verticales de la surface projetées horizontalement dans le double espace BAB', CAC', et, au contraire, maxima sur celles qui se projetteront dans le double espace BAC', CAB'. Si donc on imagine une autre coupe verticale, suivant une droite EF tirée dans le plan des xy à une distance infiniment petite du point A et croisant sous des angles sensibles, par exemple, les côtés AB et AB', ou AC et AC', de l'un des angles opposés BAB', CAC', l'ordonnée z de la surface, d'abord plus petite en E qu'elle n'est en A, deviendra plus forte en I, dans l'intervalle des deux droites BC, B'C', et puis, de nouveau, plus faible en F; de manière à passer au moins deux fois par sa valeur c relative au point A, savoir, en des points e, f qui, vus de A, soient dans des directions, infiniment voisines de AB, AB' ou de AC, AC', propres à rendre infiniment petite la valeur absolue de $\frac{d^2z}{dl^2}$ en A ou, par conséquent, à rendre indécise et susceptible de s'annuler la variation de z entre A et e ou f.

Mais il ne pourra pas y avoir, sur EF, plus d'un de ces points, e ou f, près de chaque droite BC ou B'C'. Car la dérivée seconde de z en l le long de EF, exprimée par $rH^2+2sHK+tK^2$, reste, de E en F, négative et de grandeur notable, étant partout sensiblement ce qu'elle serait au point voisin A pour les mêmes valeurs de H et K, c'est-à-dire pour la parallèle à EF menée en A dans les deux angles BAC', CAB'; et il suit de là que la pente de la surface suivant EF, décroissant sans cesse, est d'abord positive, puis définitivement négative, ou que, le long de EF, z ne croît qu'une fois et ne décroît qu'une fois, de manière à passer deux fois seulement par chacune de ses valeurs.

En résumé, la courbe $F(x,y)=c$, menée par le point A, coupe

chaque droite EF voisine de A en deux points, e, f, situés par rapport à A dans des directions tendant vers AB, AB' ou vers AC, AC'; et, comme il est clair que, si EF se déplace, chacun de ces deux points décrira une ligne, la courbe comprend, aux environs du point A, deux *rameaux* eAe', fAf', ayant pour tangentes respectives en A les deux droites BC, B'C'. Un pareil point où se croisent ainsi deux branches d'une courbe est appelé *point double*.

Ce sera, parmi les lignes du second degré, non une ellipse à axes infiniment petits, comme pour les points isolés, mais une hyperbole à axes infiniment petits, ou confondue avec ses asymptotes, qui en reproduira la forme dans le voisinage immédiat du point A. On voit donc que, tout autour des points singuliers appartenant aux deux espèces les plus ordinaires, la forme d'une courbe n'est plus, comme autour d'un point non singulier, sensiblement exprimable par une équation du premier degré entre les deux coordonnées x, y, à la manière d'une simple droite, mais qu'elle le devient par une du second.

Et, près de ces points singuliers, cela est vrai même des autres courbes $F(x, y) = c$. Car, si, appelant h, k les petits excédents variables, sur les coordonnées x, y d'un point fixe choisi à volonté, de celles des points voisins, on développe la fonction $F(x+h, y+k)$ par la formule de Taylor, il a été montré (p. 136*) que la partie variable du développement se réduira presque à ses termes du premier degré, pourvu que leurs coefficients p, q ne soient pas nuls; mais que, s'ils le sont, elle se réduira presque aux termes du second degré en h, k, supposé du moins que ceux-ci ne s'annulent pas également, ou que l'on n'ait pas aussi $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$: sans quoi, le rôle principal, en admettant la continuité des dérivées troisièmes de F comme celle des précédentes, reviendrait aux termes du troisième degré; et ainsi de suite. Or, h et k sont évidemment, pour l'étude des courbes $F(x+h, y+k) = c$ aux environs du point (x, y), de petites coordonnées courantes toutes naturelles. Donc la forme de ces courbes s'y exprimera d'ordinaire, à fort peu près, par une équation algébrique ayant tous ses termes variables d'un même degré, d'autant plus haut que le point (x, y) sera, en quelque sorte, plus singulier ou que sera plus élevé l'ordre des premières dérivées de la fonction F différentes de zéro en ce point. Et, si la discussion, parfois inévitable, de certains détails délicats demande un degré d'approximation supérieur, on joindra à ces termes principaux les plus influents de ceux qui suivront, ou, ce qui revient au même, on recourra à la considération, pour le point (x, y), de dérivées d'un ordre plus élevé que celui des premières ne s'y annulant pas.

119*. — Suite : Points de rebroussement.

C'est justement ce qui arrive dans le troisième cas, beaucoup plus particulier, qu'il nous reste à traiter, savoir, celui où, la différence $rt - s^2$ s'annulant, les deux racines de l'équation $r + 2sy' + ty'^2 = 0$ sont égales et où, par conséquent, l'un des deux angles adjacents BAB', CAB' de la figure précédente se réduit à zéro. Pour fixer les idées, admettons que la droite B'C' soit venue ainsi en coïncidence avec BC, savoir, le point B' en C et le point C' en B, ou, au contraire, B' en B et C' en C. Alors la dérivée seconde de z en l, nulle au point A pour la direction BC, y sera soit positive, soit négative pour toutes les autres à la fois, et l'ordonnée z grandira tout autour du point A, ou y décroîtra tout autour, sauf dans un espace infiniment resserré de part et d'autre de la droite BC, où, ses variations étant incomparablement plus faibles, leur signe ne dépendra pas uniquement de ce que sont r, s, t au point A, mais aussi de leurs petits changements près de BC. Il pourra donc arriver, soit que l'ordonnée z y croisse ou décroisse dans tous les sens comme suivant les directions sensiblement inclinées sur BC, quoique avec une extrême lenteur, soit que, au contraire, elle y décroisse ou y grandisse des deux côtés, quand on s'éloignera de A suivant certaines courbes tangentes à BC, soit enfin que, le long de telles lignes, elle décroisse ou croisse d'un côté de A, en allant, par exemple, vers B (c'est-à-dire tangentiellement à AB au départ), et, au contraire, croisse ou décroisse, du côté opposé, quelle que soit la ligne suivie en s'éloignant ainsi de A tangentiellement à AC.

Il importe d'observer que, dans tous ces cas, la dérivée seconde de z, le long d'une droite EF coupant BC près de A et sous un angle fini, sera partout peu différente de ce qu'elle est en A suivant la droite parallèle, c'est-à-dire partout de grandeur notable et de même signe, comme précédemment (p. 157*); en sorte que z n'y passera encore que deux fois par les mêmes valeurs, ou qu'il y aura tout au plus, sur chaque droite EF, deux points appartenant à la même courbe $F(x, y) = c$ que le point A.

Il n'y en aura même aucun dans le premier cas, l'ordonnée verticale $z = c$, menée en A, se trouvant minima ou maxima : A sera donc alors un point isolé. Dans le second cas, deux branches de la courbe tangentes en A à BC comprendront évidemment entre elles les deux parties étroites du plan où la fonction $F(x, y)$ sera soit plus petite, soit plus grande qu'en A, et les sépareront de tout l'espace environnant où elle est, au contraire, plus grande ou plus petite; le point A sera ainsi une sorte de point double. Enfin, dans le troisième cas, une

pareille bande étroite, où la fonction $F(x, y)$ se trouvera soit plus petite, soit plus grande qu'en A, n'existera que d'un côté du point A, d'où elle se détachera tangentiellement à AB; et la courbe se réduira aux deux bords de cette bande, c'est-à-dire que deux branches viendront, s'accolant l'une contre l'autre, se terminer ensemble au point de contact, A, de leur tangente commune AB. Alors, pour atténuer autant que possible la discontinuité, on se figure la courbe décrite par un mobile, qui, arrivé au point A le long d'une des branches, s'engagerait aussitôt sur l'autre branche en éprouvant, il est vrai, dans sa direction, un brusque changement de deux angles droits; et l'on regarde ainsi la seconde branche comme une continuation de la première, grâce à ce retournement complet de la tangente, pareil à celui qui se produirait au sommet d'une parabole $y^2 = 2px$ d'un paramètre $2p$ infiniment petit. Un pareil point singulier est appelé, en conséquence, ***point de rebroussement :*** on le dit ***de première espèce*** quand les deux branches s'opposent mutuellement leurs convexités ou comprennent entre elles la tangente commune; ***de seconde espèce,*** quand, au contraire, s'appuyant toutes les deux sur un seul côté de leur tangente commune, elles sont concaves dans un même sens.

Je me contente de mentionner les cas, évidemment plus exceptionnels, où les bandes étroites dont il vient d'être parlé se réduiraient à une simple ligne, lieu des pieds d'ordonnées pareilles z, minima ou maxima par rapport à toutes celles qui entoureraient leur ensemble. On continuerait alors, pour l'analogie, à regarder les deux bords de la bande évanouie comme distincts; et la ligne, de part et d'autre de laquelle la fonction $F(x, y)$ varierait dans un même sens, serait dite ***double,*** de même que l'est dans une circonstance analogue, pour une équation de la forme $F(x) = c$, une racine x de part et d'autre de laquelle $F(x)$ va soit en grandissant, soit en diminuant. Cette ligne ***singulière*** (car on y aurait évidemment partout $p^2 + q^2 = 0$), serait donc composée de points en quelque sorte doubles, sauf ses extrémités, assimilables à des points de rebroussement. Telles sont, par exemple, les portions de l'axe des x, ou droite des foyers, auxquelles se réduisent à la limite les ellipses, hyperboles et paraboles obtenues en posant respectivement $F(x, y) = \frac{\pm a^2 y^2}{a^2 - x^2}$, $F(x, y) = \frac{y^2}{2x}$, et en donnant à c des valeurs positives infiniment petites, c'est-à-dire en faisant tendre vers zéro l'axe non focal ou le paramètre. Il est vrai qu'on n'a le droit d'y appliquer la théorie précédente qu'aux points distincts des extrémités de ces portions de l'axe des x; car, à ces extrémités, où $y = 0$ et où $x =$ soit $\pm a$, soit 0, la fonction $F(x, y)$ devient indéterminée,

et, sa dérivée seconde en y, infinie, contrairement aux hypothèses faites.

Mais voyons quel est, de tous les cas pouvant avoir lieu quand $rt - s^2 = 0$, celui qui se présentera d'ordinaire. Il faut évidemment, pour le décider, recourir aux dérivées troisièmes de $F(x, y)$, au point A, suivant des droites infiniment voisines de BC, dérivées influant sur les petites variations de z dans la région à considérer.

Supposons donc continues en A les quatre dérivées partielles troisièmes de $F(x, y)$, $\frac{d^3F}{(dx^3, dx^2\,dy, dx\,dy^2, dy^3)}$, et désignons-les respectivement par u, v, v, w. Avec ces notations, la dérivée troisième de $z = F(x, y)$, le long de la droite quelconque l du plan des xy qui a ses coordonnées x, y exprimées par $x_0 + Hl$, $y_0 + Kl$, sera $uH^3 + 3vH^2K + 3\text{v}HK^2 + wK^3$; et elle aura, en A, une valeur ***généralement*** différente de zéro dans la direction BC, valeur qui, par suite, gardera presque la même grandeur et aura le même signe pour toutes les directions voisines. Mais ce signe changera avec H et K, c'est-à-dire avec le sens dans lequel seront parcourues les droites. Donc, le long de toutes ces lignes émanées de A, peu inclinées sur BC, et décrites dans un sens convenablement choisi, que nous supposerons, par exemple, être celui de A vers C, la dérivée seconde de z en l croîtra sans cesse, ou décroîtra sans cesse, en même temps que, suivant toutes les directions autres que AC, elle sera, en A, positive ou négative; et cette dérivée seconde, soit nulle (suivant BC), soit positive ou négative, en A, deviendra, dans un cas, et restera, à plus forte raison, dans l'autre, positive ou négative, au delà de ce point A, c'est-à-dire dans tout le voisinage de AC. En conséquence, la pente, ou dérivée de z par rapport à l, nulle en A, y prendra partout le même signe, et la surface $z = F(x, y)$ s'y élèvera ou s'y abaissera de manière à n'avoir aucune ordonnée égale à celle c du point de départ.

Mais il n'en sera pas de même tout près de AB; car la dérivée troisième en l de $F(x, y)$, suivant la direction BAC, ne s'annulant pas au point A, et, cette première dérivée qui ne s'y annule pas se trouvant d'ordre impair, la fonction $F(x, y)$ n'est en A, quand on la considère le long de BC, ni maxima, ni minima, et elle présente, de part et d'autre de A, des variations inverses. Ces variations sont donc, de A en B, de sens contraire à ce qu'elles sont en s'éloignant de A suivant AC ou suivant toute droite inclinée par rapport à AB d'un angle sensible; et le plan des xy contient, par conséquent, une bande étroite, débordant de part et d'autre de AB, où la fonction $F(x, y)$ est soit plus faible que c quand elle dépasse c tout autour, soit plus forte que c quand,

tout autour, elle reste en dessous. Par conséquent, *un point où p, q s'annulent et où $rt - s^2 = 0$ est ordinairement un point de rebroussement de première espèce.*

Observons, en terminant cette étude générale des trois cas principaux de points singuliers, que la direction des tangentes, définie par les coefficients angulaires correspondants y', n'aurait pu y être déduite de l'équation $F(x, y) = c$ par une première différentiation, dont le résultat $p + qy' = 0$ aurait (vu les conditions $p = 0$, $q = 0$) laissé indéterminée la valeur de y'. Mais une deuxième différentiation l'aurait fournie, du moins quand le produit qy'' peut être censé rester nul malgré la possibilité, pour la courbure et, par conséquent, pour y'', de devenir infinie en un point singulier (p. 68*).

Effectivement, la suppression du dernier terme qy'', au premier membre du résultat de cette deuxième différentiation, aurait donné $r + 2sy' + ty'^2 = 0$, équation identique à celle que nous avons trouvée directement pour les points doubles et pour ceux de rebroussement. Et, quoiqu'elle ne convienne plus pour les points isolés, assimilables à des ellipses infiniment petites où la dérivée y' reçoit toutes les valeurs (de sorte que le trinôme $r + 2sy' + ty'^2$ ni, par suite, le terme qy'' ne s'y réduisent pas à zéro) et où y'' doit être nécessairement infinie, néanmoins l'imaginarité de ses racines sera, après la démonstration précédente, un caractère suffisant de cette sorte de points, car la condition $rt - s^2 > 0$, trouvée leur correspondre, exprime justement l'imaginarité dont il s'agit des racines de l'équation $r + 2sy' + ty'^2 = 0$. Quant aux sens respectifs de la concavité ou de la convexité des deux branches qui se croisent en un point double ou qui se soudent en un point de rebroussement, on les reconnaîtrait, à défaut d'autre indice, en cherchant, soit par deux différentiations des expressions explicites correspondantes de y en x, soit par deux ou par trois différentiations de $F(x, y) = c$, le signe, sur chaque branche, de la dérivée y'', dont on formerait l'expression pour un point voisin du point singulier si, en ce dernier, elle devenait, par exemple, infinie et d'un signe difficile à constater (comme il arrive d'ordinaire en un point de rebroussement, bien que le produit qy'' y soit nul).

120*. — De quelques autres singularités, beaucoup plus rares : points multiples en général; lignes singulières; points anguleux et points d'arrêt.

Passons maintenant aux cas, extrêmement rares, où, pour le système considéré de valeurs de x et y annulant p et q, les dérivées secondes,

r, s, t, de $F(x, y)$ s'annuleraient également. Alors nous admettrons la continuité, en (x, y), des dérivées suivantes, jusqu'à celles de l'ordre qui sera le premier pour lequel elles ne s'y annuleront pas toutes. Appelons n cet ordre, pair ou impair, et désignons par α, β, γ, ... les dérivées correspondantes $\frac{d^nF}{dx^n}$, $\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}$, $\frac{d^nF}{dx^{n-2}dy^2}$, ... L'étude, pour les environs du point considéré (x, y), des formes de la surface $z = F(x, y)$ et, par suite, de la courbe $F(x, y) = c$, se fera par les deux méthodes déjà indiquées, identiques au fond, c'est-à-dire soit en développant par la formule de Taylor, et réduisant aux termes les plus influents dans chaque cas, la fonction $F(x + h, y + k)$, soit en considérant directement les dérivées de $F(x, y)$ suivant les diverses directions, au point dont il s'agit ou tout près.

Bornons-nous à quelques aperçus fournis de suite par la seconde méthode. Si l'on prend, au point proposé $A(x, y)$, les dérivées successives de $F(x, y)$ suivant la droite quelconque l dont les coordonnées courantes sont $x = x_0 + Hl$, $y = y_0 + Kl$, les $n - 1$ premières s'annuleront, et la $n^{\text{ième}}$ aura l'expression homogène

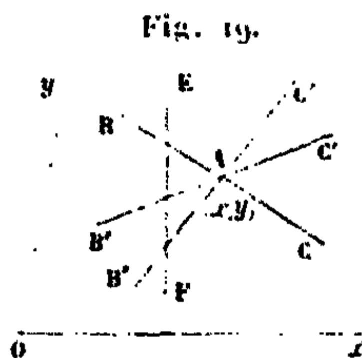
$$\alpha H^n + \frac{n}{1}\beta H^{n-1}K + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\gamma H^{n-2}K^2 + \dots,$$

dont le rapport à H^n constitue $\left(\text{vu que } \frac{K}{H} = \frac{dy}{dx} \text{ ou } y'\right)$ le polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré

$$\alpha + \frac{n}{1}\beta y' + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\gamma y'^2 + \dots. \tag{8}$$

Ce rapport, s'annulant seulement pour certaines valeurs (n au plus) de y' auxquelles correspondent des droites comme BC, B′C′, B″C″, ... diffère en général de zéro; et, d'ordinaire, son signe change quand la direction le long de laquelle on prend la dérivée $n^{\text{ième}}$ passe d'un des angles CAC′, C′AC″, ... au suivant.

Fig. 19.



Or, si n est pair, il résulte de la théorie des maxima et des minima que la fonction $F(x, y)$ sera minimum au point A pour les directions le long desquelles la dérivée $n^{\text{ième}}$ sera positive, maximum pour celles où elle sera négative. Donc, à l'exception de bandes infiniment étroites relativement au reste, contiguës aux droites BC, B′C′, ..., et où la petitesse absolue de la dérivée $n^{\text{ième}}$ en A rendra le signe de cette dérivée incertain très près de A, la fonction $F(x, y)$ sera plus grande

qu'en A dans certains des angles CAC′, ... et dans leurs opposés par le sommet, angles tous susceptibles d'être désignés à l'avance [d'après le signe + ou — que l'expression (8) y prendra], tandis qu'elle sera, au contraire, plus petite qu'en A dans les autres.

Et le même fait se produira si n est impair, à cela près que $F(x, y)$ sera, au point A, non plus minimum ou maximum, mais en train de croître ou de décroître, dans les diverses directions, suivant que la dérivée $n^{ième}$ en question se trouvera positive ou négative; de sorte que les variations de $F(x, y)$ à partir de A, au lieu d'être pareilles dans deux angles opposés par le sommet, y seront au contraire inverses.

Il est donc évident que, le long de toute droite EF coupant BC, B′C′, ..., la fonction $F(x, y)$ ne pourra acquérir sa valeur c relative au point A que dans le voisinage de ces côtés BC, B′C′, ... des angles en question; et qu'elle l'y prendra, en effet, un nombre impair de fois, près d'un côté séparant deux angles où les variations de $F(x, y)$ seront de sens contraires, tandis qu'elle ne l'y acquerra pas du tout, ou l'y acquerra un nombre pair de fois, si, dans les deux angles contigus, la différence entre $F(x, y)$ et sa valeur relative à A est de même signe. Une seule fois devra néanmoins compter pour plusieurs, savoir pour m, quand, EF étant par exemple parallèle à l'axe des y, ou ayant pour équation $x =$ constante, la valeur de y considérée sera, non pas une racine simple, mais une racine multiple, du degré m, de l'équation $F(x, y) = c$, c'est-à-dire une racine annulant les $m - 1$ premières dérivées de $F(x, y)$ en y. Toutes les tangentes possibles de la courbe, en A, se trouveront évidemment parmi les droites BC, B′C′, ... et auront pour coefficients angulaires y' les diverses racines (réelles) de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme (8), du $n^{ième}$ degré.

Le cas le plus ordinaire sera celui où il y aura, d'un angle à l'autre, changement simple dans le sens des variations de $F(x, y)$ et, par suite, le long de EF, un point unique, près de chaque droite BC, B′C′, ..., appartenant à la courbe $F(x, y) = c$ menée par A. Alors le point A sera *isolé*, si le nombre des droites est nul, ou que l'équation en y' n'ait que des racines imaginaires; *simple*, s'il n'y a qu'une droite, avec une seule branche de courbe la touchant de part et d'autre de A; *double*, s'il y a deux droites BC, B′C′ et, par conséquent, deux branches croisées en A; *triple*, s'il y en a trois, *quadruple*, s'il y en a quatre, etc., bref, *multiple*, s'il y en a plus d'une.

Il importe d'observer que, lorsque les deux angles contigus, par exemple, à AC sont des régions où les excédents de $F(x, y)$ sur sa valeur relative à A ont soit signe contraire, soit signe pareil, il en est de même pour les deux angles opposés, contigus à AB, puisque, dans

ces derniers, les variations de $F(x, y)$ seront, ou à la fois pareilles (si n est pair) ou à la fois contraires (si n est impair) à ce qu'elles sont dans les premiers, leurs opposés respectifs. Or il suit de là que, sur les droites comme EF, le nombre des points de la courbe voisins de AB est ou impair ou pair, en même temps que celui des points de la courbe voisins de AC. En d'autres termes, si, partant du point A, on compte toutes les branches de la courbe qui en émanent tangentiellement aux deux directions opposées AB, AC, on en trouvera toujours, ou des nombres impairs des deux côtés, ou des nombres pairs des deux côtés; ce qui, au total, fera invariablement un nombre pair, chaque branche comptant, bien entendu, pour autant, que l'indique le degré de multiplicité de la racine correspondante y de l'équation $F(x, y) = c$, où la variable x est donnée. D'ailleurs, le long d'une branche multiple, la surface $z = F(x, y)$ a deux tangentes, l'une suivant cette ligne, l'autre suivant EF, parallèles au plan des xy, et la pente $\sqrt{p^2 + q^2}$ y est nulle; une pareille branche constitue donc toujours une *ligne singulière*, ou vérifiant les deux équations $p = 0$, $q = 0$; et il suffit, pour que la courbe $F(x, y) = c$ n'en admette pas, que ces deux équations soient satisfaites seulement en des points séparés.

Ainsi, *dans les courbes dont l'équation* $F(x, y) = c$ *a pour premier membre une fonction bien déterminée, finie et continue avec ses dérivées partielles successives, et où il n'arrive pas que toutes ces dérivées jusqu'à l'infini s'annulent à la fois, ni les deux du premier ordre tout le long d'une ligne, les branches distinctes de courbe qui émanent d'un point singulier tangentiellement à une même droite, soit dans un sens, soit dans le sens opposé, sont toujours en nombre total pair, comme à partir d'un point non singulier, et peuvent, par conséquent, s'associer deux à deux, ou bout à bout, ou avec rebroussement, de manière à faire de la courbe un tout sans commencement ni fin.*

Il n'arrivera donc jamais, dans de telles courbes, que la tangente

Fig. 20.



Fig. 21.



éprouve une brusque déviation différente d'un rebroussement, comme

dans la ligne MAM′ (*fig.* 20), au point A, appelé, pour cette raison, ***point saillant*** ou ***point anguleux***, où la direction passe de AT à AT′ en tournant d'un angle TAT′ compris entre zéro et deux droits; ni surtout, ce qui violerait encore plus la continuité, que la courbe soit interrompue, ou qu'une branche comme *ma* (*fig.* 21) vienne, ***toute seule***, se terminer en un point *a*, dit alors *point d'arrêt*.

121*. — Application aux courbes algébriques : absence de points anguleux et de points d'arrêt dans ces courbes.

Appliquons cette théorie aux courbes algébriques, pour lesquelles $F(x, y)$ est un polynôme d'un certain degré m, à coefficients finis ([1]). Les dérivées partielles premières de $F(x, y)$ seront des polynômes du degré $m-1$; celles du second ordre, des polynômes du degré $m-2$; et ainsi de suite. Enfin, celles du $m^{\text{ième}}$ ordre seront constantes, mais non pas toutes nulles; car, dans $F(x, y)$, chaque terme du $m^{\text{ième}}$ degré, de la forme $Ax^{\alpha}y^{m-\alpha}$, aura ses dérivées partielles $m^{\text{ièmes}}$ égales à zéro, à l'exception d'une seule, prise α fois par rapport à x et $m-\alpha$ par rapport à y, à laquelle se réduira la dérivée correspondante de tout le polynôme $F(x, y)$. Donc les conditions de l'énoncé précédent, ou qui entraînent l'impossibilité de points anguleux et de points d'arrêt, sont remplies, à l'exception parfois de celle qui concerne l'absence de toute ligne singulière, le long de laquelle on aurait à la fois $p=0$, $q=0$.

Mais examinons à part le cas où il existerait une telle ligne. Ses ordonnées correspondant à une infinité d'abscisses voisines x, et que, pour chaque valeur de x, j'appellerai (n étant leur nombre) $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, annuleront à la fois $F(x, y)-c$, et, par exemple, sa dé-

---

([1]) Les ellipses, hyperboles et paraboles à axe non focal nul, citées ci-dessus (p. 160*), ne peuvent pas être regardées précisément comme algébriques; car, si l'on met leurs équations sous forme entière et de manière à y laisser subsister, comme il le faut bien, les deux coordonnées x et y, le coefficient du terme en y^2 s'y trouve infini. Pour chacune d'elles, cette équation ne revient à l'égalité $y^2=0$ qu'autant qu'on y adjoint l'une des trois inégalités $a^2-x^2 \gtrless 0$, $x>0$. Aussi, prise dans son unité ou avant son dédoublement en une égalité et une inégalité algébriques très simples, doit-elle être regardée comme transcendante : car ce qui fait la ***transcendance*** d'une ***limite*** d'expressions ***algébriques***, ce n'en est précisément pas la complication, rendue généralement par l'effacement de certaines particularités (qui entraîne une allure plus uniforme) inférieure à celle des expressions algébriques en approchant beaucoup; mais c'est l'impossibilité de représenter cette limite, d'une manière complète, par une expression algébrique à coefficients bien déterminés.

rivée q en y; de sorte que ces deux polynômes $F-c$ et q seront, pour toutes les valeurs considérées de x, divisibles par le facteur $(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)$, ou auront un plus grand commun diviseur fonction de y. Or, si l'on forme à la manière ordinaire ce plus grand commun diviseur, en divisant $F-c$ par q, puis q par le reste, etc., les restes successifs sont des polynômes en y ayant pour coefficients des fractions rationnelles en x, et l'un d'eux, le plus grand commun diviseur, du degré n au moins puisqu'il comprend le facteur $(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)$, est le dernier pour toutes les valeurs considérées de x. C'est dire que le reste suivant aura, comme coefficients de ses divers termes en y, des fractions rationnelles de x dont les polynômes numérateurs s'annuleront identiquement, incapables qu'ils seraient, autrement, de s'annuler pour plus de valeurs de x qu'il n'y a d'unités dans leur degré, alors qu'ils le font, par hypothèse, d'une manière continue sur une étendue finie. Donc $F(x,y)-c$ se trouvera exactement divisible par l'expression rationnelle, de la forme $\frac{\varphi(x,y)}{f(x)}$, constituant le reste précédent ou le plus grand commun diviseur.

Dans cette expression, $f(x)$ désigne le plus simple dénominateur commun auquel on ait pu réduire les coefficients des termes en y dans le plus grand commun diviseur trouvé; de sorte qu'il n'y a aucun diviseur en x commun à $f(x)$ et à tous les coefficients des puissances de y dans $\varphi(x,y)$. Les restes, constants ou linéaires, des divisions de ces coefficients par l'un quelconque des facteurs irréductibles du premier ou du second degré en x entrant dans $f(x)$, ne sont donc tous pas nuls. Or ces restes, multipliés par les puissances de y affectant les coefficients en question, puis ajoutés, donnent évidemment le reste total de la division de $\varphi(x,y)$ par le facteur irréductible considéré de $f(x)$, car la somme ainsi obtenue est une expression dont le degré en x, respectivement nul ou égal à 1, n'atteint pas celui du diviseur ou facteur employé; et comme cette expression diffère de zéro dans certains au moins de ses termes, le polynôme $f(x)$ est premier avec $\varphi(x,y)$ considéré comme fonction de x.

Cela posé, $F(x,y)-c$ considéré comme fonction de y, et ordonné suivant les puissances décroissantes de y, étant divisible par $\frac{\varphi(x,y)}{f(x)}$ ordonné de la même manière, il est clair que le quotient de leur division sera de même une expression rationnelle de la forme $\frac{\psi(x,y)}{f_1(x)}$, où $f_1(x)$ désignera pareillement un polynôme premier avec

$\psi(x, y)$. Et l'on aura $F(x, y) - c = \frac{\psi(x, y)\varphi(x, y)}{f_1(x)f(x)}$. Or cette relation montre que le produit $\psi(x, y)\varphi(x, y)$, en tant que fonction de x, est exactement divisible par $f_1(x)f(x)$; et un théorème connu, sur la décomposition des polynômes en facteurs, apprend alors que $f(x)$, premier avec $\varphi(x, y)$, doit diviser exactement $\psi(x, y)$, c'est-à-dire chacun de ses coefficients totaux des diverses puissances de y, et que, de même, $f_1(x)$, premier avec $\psi(x, y)$, doit diviser $\varphi(x, y)$. En appelant $\Psi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ les polynômes quotients de $\psi(x, y)$ par $f(x)$ et de $\varphi(x, y)$ par $f_1(x)$, on aura donc identiquement $F(x, y) - c = \Psi(x, y)\,\Phi(x, y)$. Autrement dit, la courbe algébrique considérée $F(x, y) - c = 0$, quand elle a une ligne singulière, se compose de deux courbes algébriques, $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$, faisant partie des familles de degrés moindres $\Phi(x, y) = \text{const.}$, $\Psi(x, y) = \text{const.}$

On dédoublerait de même ces courbes en d'autres, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'eût enfin, comme composant la proposée, que des courbes algébriques dépourvues de lignes singulières. Si deux de ces courbes plus simples, $\Phi(x, y) = 0$ et $\Psi(x, y) = 0$ par exemple, possédaient, sans être identiques, quelque arc commun, on prouverait de même, par la considération d'un diviseur commun à $\Phi(x, y)$ et à $\Psi(x, y)$, qu'elles seraient encore décomposables en courbes plus simples; et, finalement, on répartirait tous les rameaux de la courbe proposée entre des courbes algébriques irréductibles où chacun ne figurerait qu'une fois. Alors, à partir d'un même point et suivant une même tangente, on ne compterait dans l'une quelconque des courbes et, par suite, dans leur ensemble, que des nombres *pairs* de branches. Le théorème démontré vers la fin du numéro précédent s'applique donc à tous les cas d'une courbe algébrique, même en y regardant comme simples les lignes singulières.

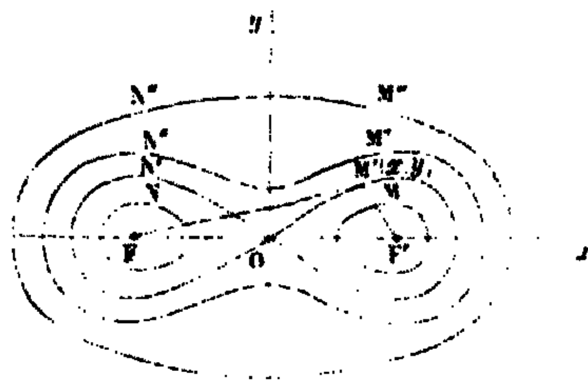
Ainsi, *les branches d'une courbe algébrique n'admettent jamais aucune autre espèce de discontinuité que des rebroussements; et une telle courbe ne comporte ni points anguleux, ni points d'arrêt.*

122*. — Exemples de points singuliers dans des courbes algébriques.

Passons à des exemples, et cherchons d'abord les points singuliers d'une famille de *lemniscates* (ou *ovales de Cassini*). On appelle ainsi les courbes MN, M'N', M''N'', M'''N''', etc., formées, les unes, de deux ovales séparés M, N, les autres, d'un seul orbe ou contour, qui ont leurs points, $M'(x, y)$ par exemple, à des distances, de deux *foyers*

F, F′, dont le produit FM′ × F′M′ soit constant pour une même courbe. Appelons c le carré de ce produit, carré qui sera un paramètre variable de zéro à l'infini, a la demi-distance des foyers, et adoptons pour axe des x la droite de jonction de ceux-ci, pour axe des y

Fig. 22.



l'autre axe de symétrie des courbes, perpendiculaire sur le milieu de FF′. Les carrés des deux rayons vecteurs FM′, F′M′ ayant évidemment pour expressions $(x \mp a)^2 + y^2$ ou $(x^2 + y^2 + a^2) \mp 2ax$, l'équation $(\mathrm{FM}')^2(\mathrm{F}'\mathrm{M}')^2 = c$ de la famille de courbes sera

$$(9) \qquad (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = c.$$

Son premier membre est une fonction $F(x, y)$ bien déterminée, finie et continue de x et de y, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres

$$(10) \quad \begin{cases} p = 4x(x^2 + y^2 - a^2), & q = 4y(x^2 + y^2 + a^2), \\ r = 4(3x^2 + y^2 - a^2), & s = 8xy, \quad t = 4(x^2 + 3y^2 + a^2). \end{cases}$$

On peut donc appliquer la théorie exposée ci-dessus (p. 156*), et poser, en premier lieu, les deux équations $p = 0$, $q = 0$. Or la seconde revient à $y = 0$ et la première, alors réduite à $x(x^2 - a^2) = 0$, donne sur l'axe des x les trois points $x = 0$, $x = \mp a$, c'est-à-dire l'origine O et les deux foyers F, F′. Ce sont donc les seuls du plan qui puissent être singuliers. Et comme la différence $rt - s^2$, exprimée par $16(3x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ quand $y = 0$, est positive pour $x^2 = a^2$, négative pour $x = 0$, les foyers F, F′ seront des points isolés et, l'origine O, un point double, où la courbe aura les pentes $y' = \pm 1$ d'après l'équation $r + 2sy' + ty'^2 = 0$. Et, en effet, les deux points F, F′ sont ce à quoi se réduit la lemniscate quand $c = 0$, cas où il faut que l'un ou l'autre des rayons vecteurs s'annule comme leur produit $\sqrt{c}$. Quant au point O, appartenant évidemment à la lemniscate (*ordinaire* ou *proprement dite*) pour laquelle $c = (\mathrm{OF})^2(\mathrm{OF}')^2 = a^4$,

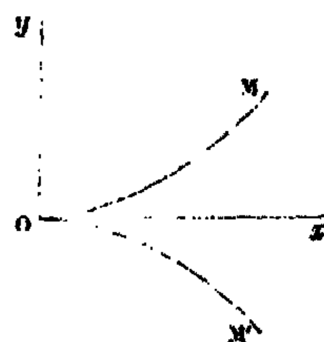
il est celui où se réunissent les deux orbes à l'instant où, le produit des deux rayons vecteurs grandissant, la courbe cesse de se composer de deux ovales distincts.

Pour avoir un exemple, le plus simple possible, de rebroussement, considérons en second lieu la famille $F(x, y) = c$ de courbes obtenue en prenant pour $F(x, y)$ le binôme $ay^2 - x^3$, où a désigne une longueur positive donnée. Il viendra

$$(11)\quad p = -3x^2, \quad q = 2ay, \quad r = -6x, \quad s = 0, \quad t = 2a.$$

Ainsi p et q ne s'annulent que pour $x = 0$, $y = 0$, $c = 0$, c'est-à-dire à l'origine des coordonnées et dans la courbe MOM', appelée *seconde parabole cubique*, dont l'équation est $ay^2 = x^3$ (1). La différence correspondante $rt - s^2$ se trouvant nulle, il y a lieu de voir, d'après la théorie générale (p. 161*), si, dans la direction unique $y' = 0$ définie par l'équation $r + 2sy' + ty'^2 = 0$, la dérivée troisième de $F(x, y)$ diffère de zéro. Or la direction en question se confond avec Ox; en sorte que la dérivée troisième à prendre est celle de r par rapport à x, ayant pour valeur -6. Donc l'origine est un point de rebroussement de première espèce. En effet, la seconde parabole cubique, évidemment dépourvue d'ordonnées du côté des x négatifs et symétrique, du côté des abscisses positives, par rapport à l'axe des x, s'éloigne de cet axe au-dessus et au-dessous, pour les valeurs positives de x, proportionnellement à $x^{\frac{3}{2}}$, en présentant la pente, d'abord nulle mais puis indéfiniment grandissante, qu'exprime de même proportionnellement la dérivée de $x^{\frac{3}{2}}$, variable comme $x^{\frac{1}{2}}$. Les deux branches OM, OM' partent donc du point O tangentiellement à l'axe des x, en s'opposant mutuellement leurs convexités, et il se produit bien, en ce point, un rebroussement de première espèce.

Fig. 23.



123*. — Exemples de points anguleux et de points d'arrêt, dans des courbes transcendantes limites de courbes algébriques.

Arrivons maintenant à des exemples de points anguleux et de points

(1) On réserve le nom de *première parabole cubique* à la courbe où c'est l'ordonnée même y, et non son carré y^2, qui est en raison directe du cube x^3 de l'abscisse. Et l'on appelle, en général, *parabole de degré m*, toute courbe où l'ordonnée est proportionnelle à la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'abscisse.

d'arrêt, dans des courbes transcendantes limites de courbes algébriques, c'est-à-dire obtenues en rendant infinis certains coefficients ou certains exposants de l'équation de ces courbes. Dans le passage à la limite transcendante, il peut se faire que la ligne algébrique se plie autour d'un point où la courbure s'exagérerait. Si le *ploiement* est tel, que la courbe y revienne tout à fait sur elle-même, comme il arrive à une conique dont l'axe non focal s'annule, le point en question ne devra pas être assimilé à un point d'arrêt, mais plutôt à un point de rebroussement; car on ne pourra se dispenser de considérer la ligne y aboutissant comme *double*, du moins tant que celle-ci sera connue ou définie uniquement par les courbes algébriques dont elle constitue la limite. Il faudrait évidemment, pour que ses extrémités devinssent des points d'arrêt, qu'elle comportât, en outre, une existence, c'est-à-dire une notion, indépendante de ces courbes, et qu'on pût ainsi cesser de voir les deux portions distinctes de ligne algébrique dont le rapprochement lui donne naissance. Mais, quand le *ploiement* n'atteint pas deux angles droits tout en étant sensible, le point autour duquel il s'effectue devient un point anguleux.

Un bel exemple de ce cas est fourni par la courbe limite de celles qui ont pour équation $x^{2n} + y^{2n} = 1$, avec un exposant positif et pair $2n$ indéfiniment croissant. Les deux coordonnées n'y dépassent évidemment pas l'unité en valeur absolue, et, pour peu que l'une d'elles ne l'atteigne pas, sa puissance $2n^{\text{ième}}$ est nulle à la limite $2n = \infty$; en sorte que l'équation donne l'unité comme valeur de la puissance $n^{\text{ième}}$ du carré de l'autre, et, à plus forte raison, de ce simple carré. Donc, pour n infini, l'équation proposée, devenue transcendante, se dédouble en deux systèmes formés chacun d'une inégalité et d'une égalité algébriques, savoir, d'une part, $x^2 < 1$ et $y^2 - 1 = 0$, d'autre part, $y^2 < 1$ et $x^2 - 1 = 0$. Leur ensemble représente un carré ayant pour centre l'origine avec ses côtés parallèles aux deux axes des x et des y. Les quatre sommets, situés aux extrémités des axes de symétrie bissectant les angles des axes coordonnés, sont donc devenus des points anguleux, où la tangente tourne d'un droit; et toute la courbure s'est, pour ainsi dire, ramassée ou concentrée en ces quatre points.

Mais il peut arriver aussi que, par sa nature même, la courbe transcendante soit la limite de fragments seulement et non de la totalité de la courbe algébrique, de manière à se composer de parties interrompues ou à présenter des points d'arrêt. Tel est le cas de la courbe figurant la fonction $y = e^{\frac{1}{x}}$, limite de $y = \left(1 + \frac{1}{mx}\right)^m$ où m désigne, par exemple, un nombre entier et positif indéfiniment crois-

sant. Il est entendu, en effet, dans cette définition de l'exponentielle en tant que limite d'une expression algébrique, que le second terme, $\frac{1}{mx}$, du binôme entre parenthèses, doit être incomparablement plus faible que le premier 1; de sorte que m est tenu de grandir assez, quand x approche de zéro, pour qu'une partie importante du parcours de la fonction algébrique n'ait jamais à être employée, notamment celle où, de $mx = -1$ à $mx = 0$, y y varie depuis zéro jusqu'à $\pm\infty$. Aussi l'exponentielle présente-t-elle, quand x passe du négatif au positif, ce saut brusque de zéro à l'infini dont il avait déjà été question dès le commencement de ce cours (p. 6*). Et la courbe $y = e^{\frac{1}{x}}$ ne pourrait pas être complétée par une portion de l'axe des y destinée à établir la transition de la valeur zéro aux valeurs infinies; car, la partie de la courbe algébrique où se faisait cette transition ayant été exclue, il doit bien subsister là une lacune. La courbe $y = e^{\frac{1}{x}}$ aura donc, à l'origine, un point d'arrêt, d'où partira, en y présentant avec l'axe des x (d'après ce qu'on a vu p. 147) un contact d'ordre infini, la branche de courbe qui répond aux abscisses négatives.

D'ailleurs, la discontinuité de la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ une fois reconnue, on peut, en compliquant l'équation, faire porter cette discontinuité non sur l'ordonnée y, mais seulement sur le coefficient angulaire y' de la tangente, où son effet sera de produire un point anguleux au lieu d'un arrêt. Il suffit, pour cela, de prendre comme équation, avec une constante arbitraire k, $\frac{kx}{y} = e^{\frac{1}{x}} - 1$; ce qui donne, pour chaque valeur de x comprise entre $-\infty$ et $+\infty$, une ordonnée y unique et ayant le signe de k, vu que le facteur x et le second membre sont positifs ou négatifs ensemble. Or, dans le voisinage de $x = 0$, le second membre devient -1 ou ∞ suivant que x est au-dessous ou au-dessus de zéro; la courbe y ressemble donc, du côté des x négatifs, à la droite $y = -kx$, mais, du côté des x positifs, à la droite $y = 0$; et la tangente tourne brusquement, à l'origine, de l'angle que font ces deux droites.

121*. — Propriété des asymptotes des courbes algébriques, corrélative de celle qu'ont ces courbes de ne pouvoir présenter de points d'arrêt. Discontinuités possibles dans les fonctions algébriques.

Un caractère important des courbes algébriques, corrélatif à celui qu'elles ont de ne pouvoir admettre de points d'arrêt, consiste en ce que *leurs branches infinies aboutissant à une même asymptote rec-*

tiligne sont toujours en nombre pair. Pour le voir, imaginons qu'on rapporte une telle courbe à l'une quelconque de ses asymptotes pour axe des y, de manière qu'il corresponde, à chaque branche s'y raccordant à l'infini, une ordonnée y distincte et indéfiniment croissante en valeur absolue. Construisons, en même temps que cette courbe, celle dont les ordonnées, que j'appellerai Y, égalent respectivement, pour chaque valeur de x, les inverses des précédentes y. Son équation se déduira évidemment de celle de la proposée en substituant $\frac{1}{Y}$ à y, puis, en multipliant par un facteur, de la forme Y^n, propre à faire évanouir les dénominateurs, facteur n'altérant nullement l'équation, car il est fini et distinct de zéro pour les petites valeurs à considérer de x. L'équation en Y sera ainsi algébrique comme la proposée, et, aux diverses valeurs croissantes de y dont il vient d'être parlé, correspondront un même nombre d'ordonnées Y s'annulant à la limite $x=0$. On comptera donc, dans la première courbe, autant de branches asymptotes à l'axe des y qu'il y aura, dans la seconde, de branches émanant de l'origine, c'est-à-dire, toujours, un nombre pair.

La propriété dont il s'agit ne se retrouve plus dans les courbes transcendantes, même limites de courbes algébriques, quand une partie de celles-ci s'évanouit en s'éloignant à l'infini et que leur autre partie, s'allongeant sans mesure à la suite de la première, devient asymptote à une de ses tangentes. C'est ce qui a lieu dans la logarithmique $y=e^x$, limite des *paraboles* de degré élevé $y=\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, où l'exposant m, que je supposerai, par exemple, entier et pair, est censé croître indéfiniment. L'axe des x, tangent à la courbe pour $x=-m$, c'est-à-dire à l'extrémité de l'axe de symétrie de la parabole, devient asymptote, et asymptote seulement du côté du point de contact ou des x négatifs, lorsque l'abscisse $-m$ de ce point est $x=-\infty$ et que l'axe de la parabole, en disparaissant ainsi à l'infini, a mis, en quelque sorte, hors d'emploi, par l'éloignement, la moitié de la courbe située au delà, avec une grande partie de celle qui est en deçà, savoir, en tout, ce qui répond à des valeurs absolues de x soit comparables, soit supérieures à m, et pour lesquelles la formule algébrique se trouve d'ailleurs entièrement étrangère à l'exponentielle. La logarithmique est donc asymptote d'un seul côté à l'axe des x; et là même est, comme on l'a vu plus haut (p. 6*), la raison du point d'arrêt que présente la courbe $y=e^{\frac{1}{x}}$, transformée de la logarithmique par le changement de x en son inverse.

Les démonstrations précédentes confirment ce qu'on avait entrevu au n° 18* de ce Cours (p. 6*), savoir, que *les discontinuités des fonctions algébriques se réduisent, soit à des passages par l'infini amenés graduellement* (*c'est-à-dire sans saut brusque entre une valeur finie et une valeur infinie*), *avec existence, en deçà comme au delà, de la fonction, ou série des valeurs considérées, soit à l'apparition simultanée ou à la disparition simultanée de deux séries de valeurs, égales entre elles, ainsi que leur dérivée, au moment où elles apparaissent ou disparaissent, à moins qu'elles n'y soient infinies toutes les deux, soit enfin à la superposition de plusieurs de ces circonstances.*



COMPLÉMENT A LA QUATORZIÈME LEÇON.

DÉFINITION D'UNE COURBE PAR LA SUITE DE SES COURBURES : THÉORIE DES COURBES ENVELOPPES, ETC.

134*. — Expression du rayon de courbure des sections coniques en fonction d'un angle définissant sa direction même : et conséquences diverses dans le cas d'une ellipse peu aplatie.

Il peut être utile d'exprimer le rayon de courbure quelconque R d'une conique en fonction d'un angle définissant sa direction.

En effet, dans l'important problème géodésique de la forme du méridien terrestre, les observations exécutées sur un même méridien ne font connaître, en chaque point, que la distance à un point voisin précédent, et la direction de la *verticale* (sensiblement perpendiculaire à la surface terrestre supposée à peu près nivelée) par rapport à ces directions de *repère,* quasi invariables, que fournissent les rayons visuels allant à des étoiles situées comme à l'infini. On peut donc seulement, le long d'un méridien, apprécier la direction du rayon de courbure, en une suite de points dont les distances respectives ds auront été mesurées de proche en proche, et, par les changements $d\theta$ qu'elle éprouve de l'un à l'autre, évaluer la grandeur R de ces rayons, égale, d'après la formule (7) [p. 200], au rapport de ds à $d\theta$. Un méridien terrestre étant assimilable à une courbe plane avec une assez grande approximation, la direction de chaque rayon R y est fixée au moyen du seul angle, λ (*latitude*), qu'il fait avec un premier rayon, situé dans le plan de l'équateur ou perpendiculaire à l'axe du monde ; et R devient ainsi une fonction empirique connue φ de λ.

Cette fonction $R = \varphi(\lambda)$ suffit pour définir parfaitement de proche en proche la forme et les dimensions du méridien. Car, si l'on prend pour origine le point de cette courbe situé à l'extrémité du premier rayon (où $\lambda = 0$), pour axe des x ce premier rayon et pour axe des y la tangente perpendiculaire menée du côté où λ grandit, l'angle, nul à l'origine, des éléments successifs ds du méridien avec l'axe des y, croîtra d'élément à élément comme celui, λ, du rayon correspondant perpendiculaire R avec le premier rayon, tandis que l'angle du

même élément ds avec l'axe des x décroîtra d'autant : ces deux angles seront donc respectivement λ et son complément, et les deux projections dy, dx de ds sur les axes, accroissements éprouvés le long de l'élément ds par les coordonnées primitivement nulles y et x, égaleront les produits de ds par les cosinus correspondants $\cos\lambda$, $\sin\lambda$. Or, d'après la même formule (7) [p. 200], où l'angle de contingence $d\theta$ dont la normale tourne le long de ds vaudra ici $d\lambda$, on aura

$$ds = \mathrm{R}\,d\lambda = \varphi(\lambda)\,d\lambda$$

et, par suite,

$$dx = \varphi(\lambda)\sin\lambda\,d\lambda, \qquad dy = \varphi(\lambda)\cos\lambda\,d\lambda.$$

Donc x et y auront, par rapport à λ, les dérivées respectives $\varphi(\lambda)\sin\lambda$, $\varphi(\lambda)\cos\lambda$; et celles-ci, à partir de l'origine où ces coordonnées s'annulaient avec λ, détermineront en fonction de λ la suite de toutes leurs valeurs x et y, de même que les ordonnées successives d'une courbe sont déterminées, en partant d'un de ses points, par ses pentes correspondant aux diverses abscisses (p. 34).

Il suffira donc, pour pouvoir attribuer au méridien la forme et les dimensions d'une certaine courbe, comme, par exemple, d'une ellipse peu aplatie ou peu excentrique ayant son grand axe suivant l'équateur, qu'il existe un accord suffisant entre la fonction $\varphi(\lambda)$ et l'expression du rayon de courbure R dans une certaine ellipse en fonction de l'angle λ fait par ce rayon avec l'axe focal. Et voilà pourquoi il y a lieu de chercher une telle expression.

A cet effet, introduisons comme variable dans le dernier membre de (14) [p. 210], au lieu de l'ordonnée y, la pente du rayon R, $\tan\lambda$, inverse en valeur absolue de celle, y', de l'élément même ds; ce qui sera possible au moyen de la première formule (12) [p. 209] immédiatement résoluble par rapport à y^2. Si nous remplaçons ensuite $\tan^2\lambda$ par son expression en fonction de $\sin^2\lambda$, il viendra, vu d'ailleurs que, dans le quotient p de b^2 par a, b^2 a la valeur $a^2(1-e^2)$,

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{R} = p(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}} = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}.$$

Dans le cas d'une faible excentricité e, on peut développer par la formule du binôme (p. 156) le dernier facteur, en négligeant les termes en e^4 et au-dessus, puis effectuer la même simplification sur son produit par le facteur précédent $1-e^2$, et observer enfin, au moyen d'un développement analogue de $b = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$, que ae^2 est, au même degré d'approximation, le double de la différence $a-b$. On trouve ainsi

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{R} = a - 2(a-b) + 3(a-b)\sin^2\lambda,$$

expression de R *dont la confrontation avec la fonction empirique* $\varphi(\lambda)$ permet de conclure à une forme sensiblement elliptique des méridiens terrestres et fait connaître, d'abord, la différence $a - b$ des deux demi-axes par la comparaison des termes proportionnels à $\sin^2\lambda$, puis les demi-axes a et b eux-mêmes par l'identification, de part et d'autre, du terme constant.

Je conclurai par trois remarques :

1° En posant, dans (16), $\lambda = 0$ et $\lambda =$ un droit, on voit que les deux rayons de courbure extrêmes minimum et maximum sont sensiblement $a - 2(a - b)$, $a + (a - b)$ et ont pour moyenne arithmétique celle, $\frac{1}{2}(a + b)$, des deux demi-axes;

2° Si nous faisons varier λ de zéro à 1 droit par accroissements infiniment petits égaux $d\lambda$, la moyenne arithmétique de toutes les valeurs correspondantes de R s'obtiendra évidemment par la substitution dans (16), au facteur $\sin^2\lambda$, de *sa propre valeur moyenne*, égale à celle du carré $\cos^2\lambda$ qui aurait pris dans l'ordre inverse les mêmes valeurs, et moitié, par conséquent, de la somme constante 1 de ces deux carrés, comme on a vu (p. 53*); d'où il suit que cette valeur moyenne de R, se produisant pour $\sin^2\lambda = \frac{1}{2}$ ou pour $\lambda = \frac{\pi}{4}$, est représentée par le rayon de courbure également incliné sur les deux extrêmes dont je viens de parler, et qu'elle égale encore leur moyenne arithmétique $\frac{1}{2}(a + b)$;

3° Enfin, quelle que soit la forme de la courbe, telle cependant, que la tangente y tourne sans cesse dans un même sens, sa longueur comprise entre les deux points *où* $\lambda = 0$ *et où* $\lambda = \frac{\pi}{2}$ *peut s'obtenir en faisant*, d'une de ces limites à l'autre, croître λ d'une différentielle toujours égale $d\lambda$; ce qui donne, d'après (7) [p. 200], des éléments de longueur correspondants, $ds = R\,d\lambda$, ayant pour somme, $(\Sigma R)\,d\lambda$, le produit de la moyenne des rayons R par leur nombre très grand n et par $d\lambda$, ou encore le produit de ce rayon de courbure moyen, entre les limites considérées, par l'angle total $n\,d\lambda = \frac{\pi}{2}$ qu'elles comprennent. La longueur d'un quart d'ellipse égale donc, en toute rigueur, celle d'un quart de cercle décrit avec son rayon de courbure moyen, qui, si l'ellipse se trouve peu aplatie, est approximativement, tant en grandeur *qu'en direction*, la moyenne des deux rayons de courbure maximum et minimum, et aussi celle des deux demi-axes a, b.

137*. — De l'enveloppe d'une famille de courbes planes et, généralement, de la ligne sur laquelle ces diverses courbes sont rapprochées de leurs voisines infiniment plus qu'en leurs autres points.

La théorie des courbes enveloppes, créée par Leibnitz, peut être considérée comme une généralisation de celle des développées. De même que la famille de lignes droites composée de toutes les normales à une courbe donne lieu, par les intersections successives de ces droites infiniment proches les unes des autres, à une nouvelle courbe, appelée *développée*, de même il arrive souvent que, dans une famille donnée de lignes droites ou courbes, chaque ligne est coupée par la suivante, sa voisine sur toute leur longueur, en certains points déterminés, se déplaçant avec continuité quand on passe de l'une à l'autre : alors le lieu de ces intersections successives est dit, pour une raison qu'on verra bientôt, l'*enveloppe* de la famille.

Proposons-nous d'abord d'en obtenir l'équation. Soit, en coordonnées rectilignes quelconques x et y, $F(x, y, c) = 0$ celle de la famille, dont c désigne le paramètre, et supposons la fonction F des trois variables x, y, c finie et continue, ainsi que ses dérivées premières, pour toutes les valeurs finies des variables : c est donc la fonction de x et de y, ou fonction de point dans le plan des xy, implicitement définie par la relation $F(x, y, c) = 0$ et susceptible, par conséquent, d'avoir en un même point plusieurs valeurs, dont l'une reste constante le long des courbes considérées. Tout point (x, y) commun à l'une de celles-ci, caractérisée par une valeur donnée c du paramètre, et à une autre voisine, pour laquelle le paramètre aura une valeur très peu différente $c + \Delta c$, vérifiera donc le système des deux équations $F(x, y, c) = 0$, $F(x, y, c + \Delta c) = 0$, dont la seconde peut être remplacée par la combinaison obtenue en prenant sa différence d'avec la première et divisant par Δc. Si Δc tend vers zéro, le premier membre $\frac{F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c)}{\Delta c}$ de cette nouvelle relation tend vers la dérivée de $F(x, y, c)$ par rapport à c; et l'on voit que le point commun atteint, sur la première courbe $F(x, y, c) = 0$, la situation limite, parfaitement déterminée d'ordinaire, où s'annule cette dérivée. On n'aura donc, pour calculer ses coordonnées x, y en fonction de c, qu'à résoudre les deux équations

$$(28) \qquad F(x, y, c) = 0, \qquad \frac{dF(x, y, c)}{dc} = 0;$$

et l'on construira par points l'enveloppe cherchée. Mais, si l'on veut

étudier celle-ci indépendamment des courbes de la famille, le mieux sera de chercher son équation en x et y, et, par conséquent, d'éliminer c entre les deux relations de la forme $x = \varphi(c)$, $y = \psi(c)$ ainsi obtenues, ou mieux directement entre les deux équations (28); ce qui pourra se faire par les procédés de l'Algèbre quand la fonction F sera entière par rapport à c.

Lorsque $F(x, y, c)$ a la forme $y - f(x, c)$, ou que l'équation $F = 0$ de la famille revient à prendre explicitement $y = f(x, c)$, la seconde relation (28) se réduit à $\frac{df(x, c)}{dc} = 0$ et, l'ordonnée y n'y figurant pas, elle fait connaître à elle seule x en fonction du paramètre c, c'est-à-dire l'abscisse des points d'une courbe donnée de la famille qui appartiennent à l'enveloppe, ou, inversement, c en fonction de x, c'est-à-dire les courbes de la famille qui ont avec leurs voisines et, par conséquent, avec l'enveloppe un point commun d'une abscisse donnée x. Il est quelquefois utile de regarder ainsi c comme fonction de x; car il en résulte que l'équation $F(x, y, c) = 0$, ou $y = f(x, c)$, qui est déjà celle de la famille lorsqu'on y pose $c =$ const., devient également celle de l'enveloppe en faisant varier c comme il est dit.

Toutefois, la seconde équation (28) étant, non pas précisément celle qui exprime l'existence d'un point commun à deux courbes de la famille très voisines, mais seulement sa limite pour le cas où le point commun existe, il n'est pas impossible qu'il y ait, sur chaque ligne de la famille, un point vérifiant les équations (28), dans des cas où la ligne en question reste partout séparée de ses voisines et où, par suite, le plan se trouve divisé, par les courbes $F(x, y, c) = 0$, en bandes minces contiguës d'une largeur qui ne se réduise nulle part à zéro. Alors, ce point se déplaçant à travers les bandes quand on passe d'une courbe à l'autre, la ligne qu'il décrit croise les courbes et ne mérite plus, comme on verra bientôt, le nom d'enveloppe : mais elle reste, à défaut d'intersections successives qui n'ont pas lieu, une région du plan où deux courbes de la famille très voisines se rapprochent incomparablement plus qu'en leurs autres points.

Si, en effet, par un point quelconque (x, y) d'une ligne $F(x, y, c) = 0$, et normalement à cette ligne, on mène une très courte droite Δl mesurant sa distance à la ligne voisine $F(x, y, c + \Delta c) = 0$, le point $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ où elle aboutit vérifie l'équation

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y, c + \Delta c) = 0,$$

dont la différence à $F(x, y, c) = 0$ peut s'écrire, d'après une formule

bien connue (p. 115),

$$(29)\qquad \left(\frac{dF}{dc}+\varepsilon\right)\Delta c+\left[\left(\frac{dF}{dx}+\varepsilon_1\right)\frac{\Delta x}{\Delta l}+\left(\frac{dF}{dy}+\varepsilon_2\right)\frac{\Delta y}{\Delta l}\right]\Delta l=0.$$

Or faisons abstraction des points singuliers des diverses courbes de la famille, points qu'on trouverait en regardant chacune d'elles comme comprise dans la famille plus générale $F =$ const., et où s'annuleraient par conséquent, avec F, les deux dérivées de F en x et y : ce qui donne trois équations en x, y, c et ne fournit en général sur le plan que des points (x, y) isolés les uns des autres ou appartenant seulement à quelques-unes des courbes $F(x, y, c) = 0$. Faisons également abstraction des valeurs infinies de c, pour lesquelles les dérivées de F en x et y pourraient être infinies, valeurs ne se produisant également que sur des courbes $F(x, y, c) = 0$ très exceptionnelles, du moins aux distances finies de l'origine. Cela posé, dans (29), le coefficient total de Δl, que j'appellerai K, ne sera ni très grand comme l'inverse de Δc, ni très voisin de zéro comme Δc. Car sa partie principale, $\frac{dF}{dx}\frac{\Delta x}{\Delta l}+\frac{dF}{dy}\frac{\Delta y}{\Delta l}$, ne deviendra nulle part infinie, les rapports à la ligne Δl de ses projections (droites ou obliques) Δx, Δy sur les axes ne se trouvant pas moins finis que sont supposées l'être les dérivées $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$; et, d'un autre côté, cette partie principale restera de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}$, vu que le rapport de Δy à Δx y diffère notablement de ce qu'il serait si la droite Δl était tangente à la courbe $F(x, y, c) = 0$, cas où il se confondrait avec la valeur de y' définie par $\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y' = 0$ et annulerait cette partie principale de K.

Donc l'équation (29) donnera, pour l'écartement Δl des deux courbes voisines $F(x, y, c) = 0$, $F(x, y, c+\Delta c) = 0$, une valeur

$$(30)\qquad \Delta l = -\left(\frac{dF}{dc}+\varepsilon\right)\frac{\Delta c}{K},$$

partout comparable à Δc, sauf aux points (x, y) vérifiant la seconde équation (28), où elle deviendra incomparablement plus faible, de l'ordre de $\varepsilon\,\Delta c$.

Ainsi, *la courbe exprimée par l'ensemble des deux équations* (28) *est le lieu des points où chaque ligne de la famille* $F(x, y, c) = 0$ *s'approche infiniment plus de ses voisines que partout ailleurs, soit que ces lignes s'y coupent successivement, soit qu'elles ne s'y coupent*

pas. Dans le premier cas, elle en est dite l'enveloppe; dans le second cas, nous avons vu qu'elle les croise.

Nous reconnaîtrons bientôt que le second cas est très rare. Il ne peut même jamais se produire dans une famille de lignes droites, qui concourent et se croisent dès qu'elles ne sont pas équidistantes. Aussi les normales à une même courbe plane se coupent-elles toujours successivement pour donner la développée de celle-ci.

Tout ce qui précède suppose, bien entendu, les équations (28) compatibles pour une suite continue de valeurs de c. Quand il en est autrement, ces équations ne représentent plus aucune courbe, à moins que ce ne soit quelque ligne exceptionnelle $F(x, y, c) = 0$ de la famille, le long de laquelle la dérivée de F par rapport à c s'annulerait identiquement. Je donnerai à la fin de la Leçon un aperçu de certains cas où il en est ainsi, et où la ligne $F(x, y, c) = 0$ dont il s'agit joue relativement aux autres, tout en n'ayant aucun point commun avec elles aux distances finies, le rôle d'enveloppe, et même, en un certain sens, le rôle de lieu d'infini rapprochement entre courbes voisines quelconques de la famille, l'espace contigu à chacun de ses points étant l'endroit où quelques-unes de celles-ci éprouvent tel degré de rapprochement qu'on veut (d'autant plus grand que cet espace est pris lui-même plus étroit) et toutes l'éprouvant à leur tour près d'un de ses points plus ou moins éloigné.

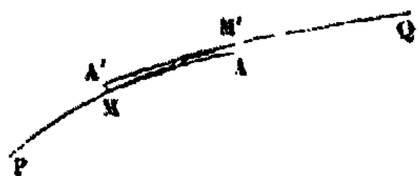
Rien n'empêche au reste que, dans le cas où les équations (28) sont compatibles pour toutes les valeurs de c et où la courbe qu'elles représentent se compose ainsi de points fournis par toutes celles de la famille, la totalité de ces points se retrouve en même temps sur une seule d'entre elles, qui est par suite, à la fois, une des lignes particulières de la famille et son enveloppe ou son lieu de points d'infini rapprochement entre courbes voisines. Il ne sera, en effet, nullement impossible, avec une multiplicité suffisante des valeurs de c, que l'une de ces valeurs soit constante le long de la ligne en question, tandis qu'une autre y changera. Nous rencontrerons plus loin (n° **141***, p. 190*) un exemple de ce fait.

138*. — Propriétés communes de ces sortes de lignes.

La première propriété générale des développées, consistant en leur tangence aux normales dont elles constituent l'enveloppe, s'étend, pour la raison exposée dans le n° **130** (p. 203), au lieu des intersections successives d'une famille quelconque de courbes, et elle s'applique même à celui des points où ces courbes, sans se couper, se rap-

procheraient incomparablement plus qu'ailleurs de leurs voisines. Pour le voir, considérons, sur ce lieu PQ, les deux points M, M' qui correspondent à deux valeurs très voisines c, $c+\Delta c$ du paramètre, ou qui appartiennent, dans la famille donnée, aux deux courbes MA, A'M' ayant pour équations

Fig. 24.



$$F(x, y, c) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, c+\Delta c) = 0.$$

L'arc MM' sera généralement comparable à Δc; car une succession de pareils arcs, qui donnerait en tout sur PQ un chemin fini, correspondrait à une succession d'accroissements Δc en même nombre constituant aussi un changement fini de c. Or, d'après la formule (30), où s'annulera ici la dérivée de F en c, l'écart MA' des deux courbes sera de l'ordre de $\varepsilon\Delta c$ ou incomparablement plus petit que MM'. Donc le triangle MA'M', formé par la droite MA' et par les deux très petites cordes M'A', M'M de la courbe A'M' de la famille et de la ligne PQ, a son côté MA' dans un rapport infiniment faible à un autre MM', et la proportion des sinus y donne l'angle opposé M' infiniment petit. C'est dire que, si M se rapproche de M', les deux cordes M'M, M'A' tendront vers la même tangente, ou que la courbe quelconque M'A' de la famille touche, en M', le lieu PQ des points de plus grand rapprochement.

Ainsi, *l'enveloppe d'une famille de lignes et, généralement, le lieu des points où ces lignes se rapprochent infiniment plus qu'ailleurs de leurs voisines, est une courbe qui les touche toutes.*

Réciproquement, une courbe, PQ, *successivement tangente, en ses divers points* M, M', ..., *à toutes celles,* MA', A'M', ... *d'une même famille, constitue une région du plan où ces dernières, si elles n'y coupent pas leurs voisines, en sont du moins infiniment plus rapprochées qu'en leurs autres points.* Car l'écart mutuel MA' de deux consécutives s'y trouvera (vu le contact supposé, en M', de PQ avec A'M') incomparablement plus petit que l'arc MM' de PQ intercepté entre elles, tandis que leur écart partout ailleurs serait, en général, de l'ordre de MM', à cause de ce fait que deux courbes espacées de quantités finies viennent toucher PQ en deux points distants aussi de quantités finies, et que ces espaces finis, soit entre les courbes, soit sur PQ, se subdivisent en un même nombre très grand de parties très petites, ou restent comparables, quand on intercale de plus en plus de courbes entre deux autres.

Il suit de là que *les tangentes à une courbe ont cette courbe même*

pour lieu de leurs plus grands rapprochements avec leurs voisines et, par conséquent, *pour enveloppe*.

La propriété dont jouit la courbe exprimée par les équations (28), d'être tangente à toutes les lignes de la famille, pourrait donc être prise pour sa définition même. Et c'est aussi ce qu'on voit très simplement d'une manière plus analytique. Observons à cet effet que, le long d'une ligne tracée au hasard sur les parties du plan occupées par la famille $F(x, y, c) = 0$, c varie toujours en fonction de x d'une certaine manière. Donc l'équation $F(x, y, c) = 0$ représentera telles lignes qu'on voudra de ces parties du plan si c y égale une fonction convenablement choisie de x, et, en appelant c' la dérivée de cette fonction, le coefficient angulaire y' de la tangente y résultera, par suite, de l'équation dérivée $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dc}c' = 0$. Mais, en chaque point (x, y) de cette ligne passe une courbe de la famille, celle tout le long de laquelle c a la même valeur qu'en ce point, et le coefficient angulaire y' qui lui est relatif résulte de l'équation dérivée, obtenue sans faire varier c, $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0$. Or la comparaison des deux équations dérivées ainsi écrites montre que la condition nécessaire et suffisante pour l'identité de ces deux coefficients angulaires y' et, par suite, des tangentes menées en (x, y) aux deux courbes, est $\frac{dF}{dc}c' = 0$; ce qui, vu le changement incessant de c ou la non-annulation de c' le long de la ligne suivie, distincte par hypothèse des courbes *rencontrées* $c =$ const. de la famille, revient bien à poser la seconde équation (28).

Si, par l'élimination de c entre les deux relations $F(x, y, c) = 0$ et $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0$, on forme, en x, y et y', l'équation différentielle de la famille, il est clair que l'enveloppe, ou la courbe lieu de plus grand rapprochement dont il vient d'être parlé, la vérifiera, puisque, en chacun (x, y) de ses points, la dérivée y' s'y trouve la même que dans la ligne particulière $F(x, y, c) = 0$ qu'on y mènerait. L'enveloppe ou la courbe en question constitue donc, pour l'équation différentielle, une solution spéciale, généralement bien différente de celles qu'expriment les lignes de la famille : aussi cette solution est-elle appelée ***singulière***, du moins quand aucune courbe $F(x, y, c) = 0$ ne se confond avec elle.

139. — Propriété distinctive des courbes enveloppes.

Nous avons déjà vu (p. 179*) que, lorsque les lignes successives de

la famille ne se rencontrent pas, elles sont croisées par la courbe que représentent les deux équations (28), lieu de leurs points d'infini rapprochement avec leurs voisines.

Mais il n'en est pas de même quand ces lignes très voisines ont des points communs.

Et, d'abord, elles se coupent en ces points. Car, si elles s'y touchaient seulement, elles diviseraient le plan en bandes étroites sans commencement ni fin, bien que d'une épaisseur nulle aux points considérés; et toutes les bandes formées par les lignes de la famille intermédiaires entre deux se touchant ainsi, perdraient à la fois leur largeur au point de contact : ces lignes concourraient donc toutes ensemble. Autrement dit, l'enveloppe ne se composerait que de points isolés et ne formerait pas une courbe, comme on le voit, par exemple, dans la famille de paraboles $y^2 = 2cx$ ayant même axe et même sommet, dont l'enveloppe se réduit évidemment à ce sommet. Abstraction faite d'un cas aussi exceptionnel, les courbes voisines, quand elles ont un point commun, s'y coupent.

Cela posé, si, donnant successivement à c des valeurs équidistantes très rapprochées, on construit les courbes AMB, A'M'B', A''M''B'', ... qui leur correspondent, et que l'on marque, sur trois d'entre elles consécutives, A'M'B', A''M''B'', A'''M'''B''' par exemple, les points respectifs M et M', M' et M'', M'' et M''', où chacune d'elles est coupée par la courbe précédente et coupe la suivante, des circonstances analogues se produiront, par raison de continuité, autour de chacun de ces trois couples de points, c'est-à-dire que, par exemple, les trois

Fig. 29.



cordes MM', M'M'', M''M''' seront sensiblement pareilles, soit pour la grandeur, soit pour l'orientation, et que, de plus, la partie M''B'' de la dernière de ces courbes sera disposée, par rapport à la partie analogue M'B'' de la deuxième, comme l'est celle-ci par rapport à la partie encore analogue MB' de la première; etc. Les deux segments M'B' et M''B'' se trouveront donc l'un d'un côté, l'autre de l'autre, de la courbe intermédiaire A''B'' et, par suite, le prolongement M'M de B'M' sera, par rapport à A''B'', d'un même côté que M''B'' ou M'M''.

Et les intersections successives précédant M, ou celles qui suivront M‴, jusqu'à des distances sensibles, se maintiendront, à plus forte raison, du même côté de la courbe A″B″; car elles seront prises sur des segments de courbes situés de ce côté et s'éloignant même de plus en plus au-dessus les uns des autres. Donc une ligne continue menée par les intersections successives. . . . , M, M′, M″, M‴, . . . laissera toute la courbe A″B″ (jusqu'à des distances notables) sur un seul de ses côtés, sauf un arc très petit entre M et M‴; et, si l'on conçoit que, la courbe A″B″ restant fixe, ses voisines soient prises de plus en plus rapprochées et de plus en plus nombreuses, de manière que la ligne MM′M″. . . des intersections tende vers l'enveloppe sa limite avec annulation finale de l'arc MM‴, la courbe A″B″ sera, dans tout le voisinage de son point de contact avec l'enveloppe, d'un même côté de celle-ci, où se trouveront évidemment aussi les courbes *voisines* A′B′, A‴B‴, etc. Donc, quand les lignes de la famille se coupent, leur enveloppe ne fait que les toucher.

En résumé, *le lieu des points d'infini rapprochement des lignes successives de la famille touche ces lignes en les croisant lorsqu'elles ne s'y coupent pas elles-mêmes, et les touche sans les croiser lorsqu'elles s'y coupent.*

Ce dernier cas, où le lieu en question constitue une limite d'intersections successives, est de beaucoup le plus commun; car, dans les conditions de continuité habituelles, il suppose, entre la ligne représentée par l'ensemble des deux équations (28) et les courbes de la famille, un contact d'ordre impair, c'est-à-dire du premier ordre seulement; tandis que le cas contraire, impliquant le croisement des courbes de la famille par cette ligne, suppose un contact d'un ordre pair au moins égal à 2, d'une réalisation bien plus difficile et bien plus rare.

Ainsi, ordinairement, la ligne dont l'équation s'obtient en éliminant c entre les deux relations (28) laisse sur un seul de ses côtés toutes les courbes de la famille, censées du moins réduites aux parties avoisinant leurs points de contact avec elle. Par conséquent, cette ligne entoure ou limite les régions du plan qui les contiennent. Voilà justement pourquoi on l'appelle alors l'*enveloppe* de la famille; et les diverses courbes $F(x, y, c) = 0$ sont dites ses *enveloppées*.

140*. — Exemples.

Un exemple très simple de courbe enveloppe est fourni par la famille de cercles de rayon constant, ayant leurs centres sur l'axe des abscisses, que nous avons étudiée au n° 78 (p. 127), et dont l'équation

différentielle exprime l'égalité de leurs normales au rayon. Leur équation étant, en coordonnées rectangles, $(x-c)^2+y^2-R^2=0$, la seconde relation (28) se formera en annulant la dérivée par rapport à c, $-2(x-c)$, de son premier membre $F(x, y, c)$, qui est bien en x, y, c une fonction continue et à dérivées continues. Sur chaque cercle, les points communs avec le cercle suivant auront donc l'abscisse même $x=c$ du centre, comme le montre de suite la construction de ces cercles; et la valeur $c=x$ qui en résulte pour c, substituée dans l'équation de la famille, donnera celle de l'enveloppe, $y^2-R^2=0$ ou $y=\pm R$. Ainsi, cette enveloppe se compose des deux parallèles à l'axe des x tangentes à tous les cercles, et entre lesquelles ils sont bien contenus. La normale à ces droites, menée jusqu'à la rencontre de l'axe des x, est, comme il le fallait, égale à R; et, par conséquent, elles constituent une solution tout autre que les cercles, ou *singulière,* de l'équation différentielle de la famille.

Un exemple, non moins simple, d'une famille de courbes sans enveloppe, mais admettant un lieu de points d'infini rapprochement entre courbes voisines, est donné par les *premières paraboles cubiques* $y=a(x-c)^3$, qui croisent l'axe des abscisses en leur centre et point d'inflexion $x=c$, en ayant avec cet axe $y=0$ (vu l'annulation, pour $x=c$, de y, y' et y'') un contact du second ordre. La fonction $F(x, y, c)$ étant ici $y-a(x-c)^3$, la seconde équation (28) se réduit à $3a(x-c)^2=0$ et donne $c=x$; d'où résulte $y=0$: autrement dit, le centre de symétrie $x=c$ de chaque parabole est son point le plus rapproché, infiniment rapproché même, des paraboles voisines, et l'axe des abscisses $y=0$ est le lieu de ces points de plus grand rapprochement. L'équation différentielle de la famille, à laquelle conduit l'élimination de c entre $y=a(x-c)^3$ et $y'=3a(x-c)^2$, est $y'^3=27ay^2$; et la ligne obtenue $y=0$ la vérifie bien. Elle en constitue la solution singulière; car elle ne se confond avec aucune des paraboles $y=a(x-c)^3$, où a diffère de zéro.

141*. — Enveloppes intérieures, limitant, dans le champ couvert par une famille de courbes, les régions qui en sont plus ou moins sillonnées.

Il arrive souvent que, dans la partie du plan occupée par la famille donnée $F(x, y, c)=0$, le nombre des courbes se croisant en chaque point (x, y) n'est pas le même partout, et alors il y a lieu de diviser le *champ* qu'occupe la famille en deux ou plusieurs régions distinctes, dont chacune soit, en tous ses points, sillonnée par un même nombre de courbes. Or il est aisé de voir que les lignes sépa-

ratives de ces diverses régions sont en général des lieux d'intersection de courbes infiniment voisines et constituent, par conséquent, tout autant de branches de la ligne représentée par les équations (28), au même titre que la limite même (lorsqu'elle existe) du champ entier de la famille : ce sont comme des *enveloppes intérieures,* dont cette dernière limite, *enveloppe extérieure,* ne se distingue qu'en ce que le nombre des courbes se croisant en un même point y tombe à zéro au lieu simplement d'y changer.

Pour le reconnaître, attribuant à x une valeur quelconque donnée, faisons, dans l'équation, varier y de $-\infty$ à $+\infty$, ou déplaçons-nous sur le plan le long d'une parallèle à l'axe des y, et supposons qu'on note, en chaque point (x, y) ainsi atteint, le nombre des valeurs de c, c'est-à-dire des courbes de la famille qui s'y croisent. En vue de fixer les idées, assimilons la variable y à une abscisse, sa fonction c à une ordonnée, et imaginons que l'on construise la ligne exprimée, dans ces conditions, par $F(x, y, c) = 0$, où x sera devenu ainsi une simple constante. Faisons d'abord, pour simplifier, abstraction : 1° des valeurs infinies de c qui correspondraient à des valeurs finies de y ou qui, dans la ligne fictive en question, représenteraient des points situés à l'infini; et aussi, 2°, des points singuliers que pourrait très exceptionnellement présenter cette même ligne fictive.

La fonction $F(x, y, c)$ étant censée, pour les valeurs finies des variables, continue avec ses dérivées premières en y et en c, la ligne auxiliaire dont il s'agit, ou qui a l'abscisse y et l'ordonnée c, se continuera de part et d'autre de chacun de ses points, comme on a vu (p. 44*); et elle ne pourra, à l'instant où seront atteintes certaines valeurs de l'abscisse y, perdre ou gagner des ordonnées c, qu'à la faveur d'une branche tangente à ces ordonnées et n'existant que sur un seul de leurs côtés où elle se prolongera de part et d'autre du point de contact. Or, ou bien une telle branche se confond sur une certaine longueur avec l'ordonnée c, et alors il y a, pour cette valeur de y, des valeurs de c infiniment voisines les unes des autres (puisqu'elles sont même en nombre infini), c'est-à-dire, au point (x, y) correspondant du champ de la famille, des courbes très peu différentes s'intersectant. Ou bien, au contraire, la branche en question de la ligne auxiliaire n'a, avec l'ordonnée c, qu'un point commun, celui de contact; et alors, dans le voisinage, pour une abscisse y infiniment peu différente, elle a deux ordonnées presque égales à c, la branche s'y trouvant évidemment coupée, par une parallèle à sa tangente c, des deux côtés du point de contact.

Dans les deux cas, toute valeur de y pour laquelle changera le

nombre des valeurs de c correspondra, sur la parallèle à l'axe des y suivie, à un point (x, y) où se produiront deux valeurs de c infiniment peu différentes, limites d'autres très peu différentes en ce même point ou à son approche. Le point (x, y) ainsi obtenu fera donc partie du lieu des intersections successives de courbes de la famille très voisines, que nous appelons *enveloppe*, et que donnent les équations (28).

Le même fait aura également lieu presque toujours quand la ligne auxiliaire $F(x, y, c) = 0$, dans laquelle y et c sont les coordonnées, présentera des points singuliers, puisque, sauf le cas extrêmement rare de branches singulières y aboutissant, les ordonnées c qui s'introduiront ou disparaîtront pour des abscisses y de tels points singuliers iront toujours (p. 165*) par groupes de deux, égales à ce premier ou dernier moment. Et même s'il existe une branche singulière, d'un degré pair de multiplicité, qui mette en défaut ce principe, c'est-à-dire qui, commençant ou finissant pour une certaine valeur de l'abscisse y, fasse naître ou évanouir pour cette valeur de y une valeur de c *unique géométriquement* (ne donnant qu'une courbe $c =$ const. en chaque point de la parallèle suivie à l'axe des y) bien qu'*analytiquement* équivalente à plusieurs, on ne pourra sans doute que par une fiction d'analyse voir là une rencontre de courbes infiniment voisines, puisque celles-ci ne pourront être distinguées l'une de l'autre : mais, du moins, les équations (28) exprimeront encore cette sorte de limite d'une région; car la dérivée de F par rapport à c, dans la ligne fictive ayant pour coordonnées y et c, sera nulle le long de toute branche singulière.

Ainsi, une limite de deux régions susceptible d'être traversée par des parallèles à l'axe des y, et aux divers points de laquelle c ne soit pas infini, fait toujours partie du lieu des intersections successives des courbes de la famille, ou, du moins, de celui que représentent les équations (28). Et quant à une limite qui serait, sur une certaine longueur, parallèle à l'axe des y, ou que ne couperaient pas les lignes suivies ci-dessus, la même conclusion s'y étend; car on peut la traverser le long de droites parallèles à l'axe des x.

En résumé, *aux distances finies de l'origine, les seules enveloppes ou les seuls confins de région que les équations* (28) *soient parfois impuissantes à donner sont des lignes en tous les points desquelles le paramètre c prendrait des valeurs infinies;* ce qui, lorsque y ne varie pas alors infiniment comme c (pour x constant), implique en général la tendance de y vers une limite et, par suite, de la courbe $F(x, y, c) = 0$ vers une dernière situation parfaitement déterminée, susceptible, dès lors, d'être obtenue en y regardant la valeur infinie

de c comme constante. Autrement dit, les enveloppes en question, intérieures ou extérieures, seules capables d'échapper aux équations (28), sont constituées par des courbes extrêmes ou limites de la famille, celles sur lesquelles on a $c = \pm\infty$. Je donnerai un peu plus loin quelques exemples de ces sortes d'enveloppes : ici je me contenterai d'en étudier un assez simple d'une enveloppe intérieure lieu d'intersections successives.

Il est offert par la famille $y = c^2(x-c)^2$, composée, comme on voit, de paraboles tangentes pour $x = c$ à l'axe des abscisses, et étendant *au-dessus* de cet axe, c'est-à-dire du côté des y positifs, leur branche unique, d'autant moins ouverte, ou d'autant plus vite montante à droite et à gauche du point de contact $x = c$, qu'est plus grande la distance c de ce point à l'origine. L'axe des x est évidemment alors une enveloppe extérieure, puisque toute valeur (réelle) de c donne $y > 0$. Mais il y a, en outre, une enveloppe intérieure. En effet, y étant ainsi supposé positif, une extraction de racine carrée décompose l'équation $y = c^2(x-c)^2$ en deux du second degré par rapport à c, qui sont

$$(31) \qquad c(x-c) - \sqrt{y} = 0, \qquad c(x-c) + \sqrt{y} = 0,$$

et qui ont respectivement pour racines

$$(32) \qquad c = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - \sqrt{y}}, \qquad c = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \sqrt{y}}.$$

Les deux dernières, racines de la seconde équation (31), sont toujours *réelles*, et il existe, par conséquent, quelle que soit la valeur positive donnée de y, deux courbes de la famille se croisant au point (x, y). Mais, si l'on a $\sqrt{y} < \frac{x^2}{4}$, les deux premières valeurs (32) de c sont également réelles, et quatre courbes se croisent en chaque point. On voit donc que la parabole du quatrième degré définie par l'équation $\sqrt{y} = \frac{x^2}{4}$ ou $y = \frac{x^4}{16}$, constitue une enveloppe *intérieure*, divisant l'espace au-dessus de l'axe des x en une région inférieure, partout sillonnée suivant quatre sens différents par les courbes, et une région supérieure qui ne l'est que suivant deux. Enfin, l'espace au-dessous de l'axe des x formant une troisième région, où le nombre des courbes qui se croisent en chaque point tombe à zéro, la ligne enveloppe se composera des deux branches $y = 0$, $y = \frac{x^4}{16}$.

Il est aisé de vérifier que les équations (28) donnent effectivement

ces deux branches. Comme on a ici

$$F(x, y, c) = y - c^2(x - c)^2 \quad \text{ou} \quad y - (cx - c^2)^2,$$

la dérivée de F, par rapport à c, est $-2(cx - c^2)(x - 2c)$. Or, en l'annulant d'après la seconde équation (28), il vient bien, 1°, soit $cx - c^2 = 0$ et, par suite, $y = 0$, ce qui est l'enveloppe extérieure, 2°, soit $x - 2c = 0$ ou $c = \frac{x}{2}$ et, par suite, y ou $(cx - c^2)^2 = \left(\frac{x^2}{4}\right)^2$, ce qui est la courbe du quatrième degré constituant l'enveloppe intérieure. Toutes les paraboles de la famille sont tangentes extérieurement à cette courbe ou la touchent par son côté convexe ; mais, tandis que, à partir de leur point de contact avec elle, leur partie montante s'en éloigne indéfiniment et ne cesse pas de lui être extérieure, celle qui, au contraire, descend vers l'axe des x, la coupe ensuite, dans son relèvement ultérieur, en deux endroits, pour $x = 2c(-1 \pm \sqrt{2})$. Ces circonstances résultent immédiatement de l'expression

$$\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - (cx - c^2)^2 = \left(\frac{x^2}{4} - cx + c^2\right)\left(\frac{x^2}{4} + cx - c^2\right)$$
$$= \left(\frac{x}{2} - c\right)^2 \left[\frac{x}{2} - c(-1 + \sqrt{2})\right]\left[\frac{x}{2} - c(-1 - \sqrt{2})\right],$$

qui représente l'excédent, pour toutes les abscisses successives x, de l'ordonnée y de la parabole du quatrième degré, sur celle d'une parabole quelconque de la famille, et qui s'annule, sans changer de signe, quand $x = 2c$, mais de plus, en changeant de signe, quand $x = 2c(-1 \pm \sqrt{2})$.

Ainsi, dans cet exemple, l'enveloppe intérieure, tout en limitant les courbes de la famille, quant à leurs portions contiguës à ses points de contact avec elles, ne limite pas de même leurs parties plus éloignées, qui, d'un côté, la coupent. On exprimerait qu'elle ne borne pas la totalité, mais seulement une *partie* de ses enveloppées, en l'appelant une *enveloppe partielle* en même temps qu'une *enveloppe intérieure*.

Les paraboles considérées présentent donc cette particularité, digne de remarque, de croiser une branche de leur enveloppe à quelque distance de leurs points de contact avec elle.

Observons enfin que, sur l'autre branche $y = 0$, les expressions (32) de c se réduisent à $c = x$ et $c = 0$. La seconde de celles-ci étant constante, tandis que la première y prend autant de valeurs que l'abscisse, ce lieu, $y = 0$, d'intersections successives de toutes les courbes de la famille, est en même temps l'une d'elles, savoir celle, infiniment ouverte, dont le point de contact avec l'axe des x se trouve à l'origine.

112. — Courbes asymptotes et enveloppes asymptotes d'une famille.

Admettons qu'on ait pu assez bien choisir le paramètre c de la famille de courbes $F(x, y, c) = 0$, pour que le changement Δc, éprouvé par ce paramètre quand on passe de l'une quelconque des courbes à une autre très voisine, soit constamment du même ordre de petitesse que l'écart le plus grand (ou la plus grande distance mutuelle) existant entre ces deux courbes. Alors, s'il arrive que, pour des valeurs finies de x et de y, c devienne infini, ou qu'il existe une ligne parfaitement déterminée ayant soit l'équation $F(x, y, +\infty) = 0$, soit l'équation $F(x, y, -\infty) = 0$, la valeur du paramètre, finie tout près d'un point quelconque (x, y) de cette ligne, éprouvera une infinité de petits accroissements sensibles Δc dans le court trajet qu'il y aura de là au point même (x, y); et l'on croisera, par conséquent, en effectuant ce trajet d'une longueur indéfiniment réductible, une infinité de courbes de la famille qui occuperont ailleurs sur le plan un espace incomparablement plus large (aux endroits où l'écart de deux consécutives sera de l'ordre de Δc). Il passera donc, près du point *quelconque* (x, y) de la ligne considérée, des courbes de la famille s'y trouvant rapprochées de leurs voisines dans telle mesure très grande qu'on aura voulu fixer.

D'ailleurs, ces courbes $F(x, y, c) = 0$, chez lesquelles la valeur absolue de c sera considérable, se tiendront, d'ordinaire, d'autant plus près de leur limite $F(x, y, \pm\infty) = 0$, *sans pourtant l'atteindre,* que cette valeur absolue de c aura été prise plus grande : et, par conséquent, leur limite ne sera pas pour elles un lieu d'intersections successives, ni même un lieu d'infini rapprochement entre voisines; mais elle *tendra à être un* pareil *lieu d'infini rapprochement*, si, entre ces courbes et leur limite, on en considère à l'infini des couples de nouvelles, à paramètres c, $c + \Delta c$ de plus en plus élevés, ou ne se séparant l'une de l'autre, dans un même couple, pour présenter des écarts comparables à Δc, que de plus en plus loin du point (x, y). Celles-ci ne pourront, en effet, s'écarter mutuellement de quantités de l'ordre de Δc, comme il est entendu qu'elles le font quelque part, qu'autant que celle des deux dont le paramètre est c, ou qui enferme l'autre (à paramètre $c + \Delta c$) entre elle et la limite, s'éloignera sensiblement plus qu'elle de cette limite, et, par conséquent, aura déjà, antérieurement, commencé à le faire d'une quantité de l'ordre de Δc. Ainsi, à partir du voisinage du point (x, y), les courbes $F(x, y, c) = 0$, suivies du côté où elles divergent, s'éloi-

gneront sensiblement *les unes après les autres* de la ligne limite $F(x, y, = \infty) = 0$, dans l'ordre des valeurs absolues croissantes de leur paramètre caractéristique c. La limite $F(x, y, = \infty) = 0$ sera donc une ligne d'infini rapprochement pour celles qui n'en divergeront qu'à une distance infinie; et rien n'empêche que, prolongée sans fin dans les deux sens ou se fermant sur elle-même, elle en soit de même une pour toutes les courbes $F(x, y, c) = 0$.

On pourra l'appeler, à l'exclusion de ces courbes sur lesquelles c est fini, la ligne *asymptote* de la famille, si l'on entend cette dénomination dans un sens plus étendu que le sens ordinaire, où l'*asymptotisme* désigne un indéfini rapprochement se complétant à l'infini, mais ne se réalisant dans une mesure très grande, par les divers degrés croissants de rapprochement de deux courbes relativement à leur écart initial ou maximum donné, qu'à partir de points plus ou moins éloignés de l'origine. Ici, au contraire, il s'agit d'un *asymptotisme qui se manifeste, en chaque point* (x, y), *par tel degré très élevé de rapprochement relatif qu'on le veut, déjà opéré* à cet endroit, entre l'asymptote et diverses courbes convenablement choisies de la famille.

Effectivement, nulle courbe de la famille ne peut en être une asymptote *ainsi entendue*, que si le paramètre c y acquiert une valeur infinie. Car admettons que l'une des lignes $F(x, y, c) = 0$ soit une telle asymptote. Nous devrons concevoir que, dans le voisinage d'un *quelconque* (x, y) de ses points, il passe d'autres courbes de la famille, présentant avec elle et, par suite, chacune relativement à une autre contiguë, une infinité de degrés très élevés de rapprochement (eu égard à leur écart en d'autres endroits, de l'ordre de la variation Δc du paramètre pour deux consécutives). Donc, en suivant, à partir de (x, y), cette ligne asymptote, jusqu'aux points où s'en éloigneront à des distances sensibles les courbes de la famille dont le rapprochement relatif mutuel en (x, y) atteignait ces degrés très élevés, on en trouvera d'autres, comprises entre elle et les précédentes, présentant à leur tour ces mêmes degrés très élevés de rapprochement relatif, ou qui, par suite, près de (x, y), étaient incomparablement plus rapprochées que les précédentes de l'asymptote; et ainsi de suite à l'infini. Or chacune de ces séries de courbes qui, aux endroits où elles sont étalées, couvrent des étendues de largeur sensible, correspond à une variation totale également sensible du paramètre c; et une infinité de pareilles séries implique une variation infinie du paramètre, à moins que celui-ci ne passe une infinité de fois par les mêmes valeurs sur des courbes différentes et, définissant ainsi très imparfai-

tement ces courbes, ne soit mal choisi. C'est bien dire que si, à partir d'un point voisin de (x, y), mais d'ailleurs quelconque et où c est par conséquent fini, on se rend au point (x, y), le paramètre c éprouve à la traversée de tout cet ensemble de lignes un changement total infiniment grand, et devient infini en (x, y) comme il s'agissait de le démontrer.

Le paramètre c variant avec une rapidité qui dépasse toute limite à l'approche d'une *courbe asymptote*, le rapport de Δl à Δc y devient évanouissant dans la formule (30) [p. 180*]; et celle-ci montre que la dérivée de F par rapport à c y est alors infiniment plus voisine de zéro que l'expression appelée K, laquelle se trouve comparable à la plus forte des deux dérivées F en x et en y. Si donc ces deux dérivées de F en x et y ne deviennent pas infinies avec c, la dérivée de F par rapport à c sera nulle tout le long de la courbe asymptote; et les équations (28) [p. 178*] ne représenteront pas moins une pareille courbe que les lieux d'intersections successives ou d'infini rapprochement ordinaires. Mais il pourra n'en être plus de même quand les dérivées de F en x ou en y dépasseront toute limite avec c : néanmoins, comme la dérivée de F en c devra, sur la ligne asymptote, avoir un rapport infiniment petit avec ces dérivées en x et en y, il lui arrivera encore assez souvent de vérifier la seconde équation (28).

La démonstration, donnée tout à l'heure (p. 188*), touchant les limites des diverses régions occupées par une famille de courbes, indique que les lignes asymptotes de la famille, lieu de points (x, y) où le paramètre c est infini, peuvent remplir le rôle d'enveloppes : je les appellerai alors des *enveloppes asymptotes*.

143. — Exemples.

Il est aisé d'en donner des exemples, sur des familles ayant leurs équations de la forme $F(x - c, y) = 0$ (¹), ou comprenant les diverses positions d'une courbe exprimée d'abord par l'équation $F(x, y) = 0$, et que l'on déplace parallèlement à l'axe des x de la quantité positive ou négative c. A des valeurs successives du paramètre toutes équidistantes de Δc, correspondront par conséquent des courbes présentant chacune avec la suivante les mêmes séries d'écarts Δl, inférieurs mais généralement comparables à la distance Δc de deux points homologues de ces courbes et atteignant cette valeur maxima

(¹) On en trouvera plus loin (n° 181*) un exemple très simple d'un autre genre, dans une famille de lignes recouvrant une surface.

Δc aux endroits où la tangente serait perpendiculaire à l'axe des x : le rapport de Δc à Δl, donné par (30), permettra donc d'apprécier, en chaque point (x, y) du plan, le degré du rapprochement entre courbes voisines.

Or toute asymptote, parallèle aux x, de la ligne $F(x, y) = 0$ génératrice de la famille, deviendra évidemment une courbe asymptote de cette dernière; car elle se confondra avec la ligne génératrice supposée s'être éloignée d'une quantité $+c$ ou $-c$ infinie, et elle présentera, en chacun de ses points, tous les degrés possibles très élevés de rapprochement avec diverses positions moins avancées de cette même ligne. Ce sera une enveloppe extérieure quand la courbe $F(x, y) = 0$ se trouvera tout entière sur un seul de ses côtés, une enveloppe intérieure quand elle s'étendra des deux côtés, mais qu'elle possédera plus d'ordonnées y, ayant même valeur, d'un côté que de l'autre, de manière à donner lieu en chaque point (x, y) du plan, par ses diverses positions, à plus de croisements d'un côté que de l'autre; enfin ce sera une simple courbe asymptote, non enveloppe, dans les autres cas, comme par exemple quand la ligne $F(x, y) = 0$ se trouvera symétrique par rapport à un point de l'asymptote et présentera des deux côtés des particularités analogues.

Voici d'abord trois familles, deux transcendantes, la troisième algébrique, dont l'équation $F = 0$ se forme en prenant respectivement

$$(33)\quad F = y - \operatorname{tangh}(x - c), \quad = y - e^{-\frac{1}{(x-c)^2}}, \quad = y[1 + (x - c)^2] - 1,$$

c'est-à-dire

$$(34)\quad y = \operatorname{tangh}(x - c), \quad y = e^{-\frac{1}{(x-c)^2}}, \quad y = \frac{1}{1 + (x - c)^2}.$$

Dans les deux premières familles, les dérivées de F tant en x qu'en y sont partout finies et, dans la troisième, la dérivée de F par rapport à c s'annule pour c infini, comme nous le reconnaîtrons bientôt; de sorte que, dans les trois, les relations (28) donnent les courbes asymptotes. Quand $x - c$ grandit de $-\infty$ à zéro et de zéro à $+\infty$, l'ordonnée y croît, dans la première, de -1 à zéro et de zéro à 1, décroît dans la seconde de 1 à zéro, pour croître ensuite de zéro à 1, et croît au contraire, dans la troisième, de zéro à 1 pour décroître ensuite de 1 à zéro. Il y a donc, comme lignes asymptotes, obtenues en posant $c = \infty$ et $c = -\infty$ dans la première, $c = \pm\infty$ dans les deux autres, les droites respectives $y = -1$ et $y = +1$ dans la première famille, $y = 1$ dans la deuxième, $y = 0$ dans la troisième; et ce sont des enve-

loppes extérieures, concurremment avec le lieu d'intersections successives $y=0$ de la seconde et $y=1$ de la troisième.

Les équations différentielles de ces trois familles, résultant de l'élimination de $x-c$ entre les équations (34) et leurs dérivées, sont respectivement

$$(35)\quad y'=1-y^2,\qquad y'^2=4y^2\left(\log\frac{1}{y}\right)^2,\qquad y'^2=4y^4\left(\frac{1}{y}-1\right).$$

Les deux dernières n'admettent pour y' des valeurs (réelles), ou ne donnent y'^2 positif, qu'autant que l'ordonnée y s'y trouve comprise entre zéro et 1 : il n'y a donc, de toute manière, aucune courbe en dehors des deux enveloppes $y=0$, $y=1$ que nous venons de trouver. Mais la première (35) est satisfaite, en dehors des deux limites $y=\pm 1$, quand on y remplace y par l'inverse, $\coth(x-c)$, de la valeur $\operatorname{tangh}(x-c)$ que nous lui connaissons entre ces limites ; ce qui se voit de suite en observant que la substitution de $\frac{1}{y}$ à y transforme la première (35) en celle-ci, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)=1-\left(\frac{1}{y}\right)^2$, vérifiée identiquement en vertu même de (35), vu que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{y'}{y^2}$. Il est donc naturel d'associer à la famille $y=\operatorname{tangh}(x-c)$ de courbes, comprise entre les deux asymptotes $y=\pm 1$, la famille $y=\coth(x-c)$, bornée intérieurement par les mêmes asymptotes ou occupant le reste du plan. Mais cela ne suffit pas pour qu'on doive regarder les droites $y=\pm 1$ comme des enveloppes intérieures, ou séparatives de diverses régions dans le champ d'une même famille, malgré une certaine analogie avec ces enveloppes : car, bien qu'associées par leur équation différentielle commune $y'=1-y^2$, les deux familles sont distinctes, puisque leurs équations finies sont toutes différentes ; et, d'ailleurs, les courbes d'aucune de ces deux familles ne s'étendent des deux côtés de leurs asymptotes, sur l'espace voisin, comme le faisaient de part et d'autre de leur enveloppe intérieure les paraboles étudiées tout à l'heure (p. 190*).

J'ai dit que, même dans la troisième famille (34), où la dérivée de l'expression correspondante (33) de F en y devient infinie avec c, celle de F par rapport à c s'annule alors. En effet, elle égale $-2y(x-c)$, expression qui, vu la troisième valeur (34) de y, devient sensiblement, pour c infini, le quotient de $-2(x-c)$ par $(x-c)^2$, ou celui de -2 par le diviseur infini $x-c$.

Il n'en sera plus de même si l'on pose

$$(36)\qquad F=y[1+(x-c)^2]-(x-c)\qquad\text{ou}\qquad y=\frac{x-c}{1+(x-c)^2},$$

équation représentant des courbes qui ont encore l'axe des x pour asymptote, mais qui croisent cet axe en leur *centre* $x = c$; ce qui fait que leur ligne asymptote $y = 0$ n'est pas une enveloppe. La dérivée de F en c, $-2y(x-c)+1$, calculée pour les très grandes valeurs absolues de c qui font y sensiblement égal à l'inverse de $x-c$, devient la quantité finie $-2+1$ ou -1. Et cette dérivée, évaluée d'une manière toute pareille, serait même infinie avec c (car sa moitié se réduirait sensiblement à $x-c$) si l'on posait

$$(37)\qquad F = y[1+(x-c)^4]-(x-c)^2, \qquad y = \frac{(x-c)^2}{1+(x-c)^4},$$

cas où l'on a essentiellement $y>0$ et où l'axe des x, encore ligne asymptote, cumule ce rôle avec celui de lieu d'intersections successives, ou de tangente (pour $x=c$) aux courbes de la famille; ce qui en fait à double titre une enveloppe.

Je terminerai par une remarque assez importante. Dans les exemples ci-dessus, la dérivée y' ne dépasse nulle part une certaine grandeur absolue; et il en résulte que l'écart mutuel de deux courbes voisines en un endroit quelconque (x, y) est du même ordre, soit que l'on y considère sa vraie valeur, mesurée par la normale Δl allant de l'une d'elles à l'autre, soit qu'on l'estime par une parallèle Δy à l'axe des y, intercalée entre elles à partir du même point que cette normale Δl. En effet, Δy est le grand côté d'un triangle sensiblement rectangle, ayant son second côté Δl opposé à un angle valant à fort peu près celui de grandeur perceptible que forme la tangente en (x, y) avec l'axe des y; et Δl se trouve, par conséquent, comparable à Δy. Mais il n'en est pas toujours de même; et alors une ligne véritablement asymptote peut ne plus le paraître d'une manière certaine, quand on y évalue les écarts par des parallèles Δy dont le rapport à Δl grandit sans limite.

Tel est le cas, par exemple, de la famille très simple de logarithmiques $y = Ce^x$, dont l'équation peut s'écrire $y = \pm e^{x-c}$, en appelant $-c$ le logarithme naturel de la valeur absolue de C. Leur tangente fait avec l'axe des y un angle sensible, sauf pour les très grandes valeurs positives de $x-c$; car la dérivée y', égale à $\pm e^{x-c}$, grandit indéfiniment (en valeur absolue) avec $x-c$. On ne peut donc y évaluer les écarts entre courbes voisines par des parallèles Δy à l'axe des y, si ce n'est pour des valeurs ou négatives ou modérées de $x-c$. Supposons, afin de fixer les idées, que les axes soient rectangulaires. Alors, si l'on mène entre deux courbes consécutives à paramètres c, $c+\Delta c$, et en partant d'un point (x, y) de la première, la parallèle Δc à l'axe des x et la normale Δl, ces deux droites formeront, avec un

élément de la seconde courbe, un triangle sensiblement rectangle, dans lequel l'angle aigu opposé à Δl aura à fort peu près pour tangente $\pm y'$ ou e^{x-c} et, pour sinus, le rapport $\frac{\pm y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, égal à $\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2(x-c)}}}$. L'écart Δl sera donc le quotient de Δc par $\sqrt{1+e^{-2(x-c)}}$: il croîtra de zéro à Δc quand x grandira de $-\infty$ à ∞; et le *rapprochement* relatif des courbes de la famille, appréciable en chaque point d'après la petitesse, qu'on y observera, de ce rapport de Δl au *maximum* Δc, sera infini, quel que soit x, pour la valeur $c = \infty$ du paramètre, c'est-à-dire sur la ligne $y = 0$ de la famille.

Ainsi, l'axe des x est véritablement une ligne asymptote de la famille $y = Ce^x = \pm e^{x-c}$. Or il n'aurait plus en propre ce caractère si l'on ne considérait que des écarts Δy, exprimés (sans faire varier x) par $\pm e^{x-c-\Delta c} \mp e^{x-c}$ ou, sensiblement, par $\mp(\Delta c)e^{x-c}$, écarts variables de zéro à l'infini entre les limites $x = \mp\infty$ et ne fournissant pas de terme de comparaison pour apprécier les rapprochements. On serait donc réduit à prendre ces écarts en valeur *absolue;* et alors ils ne seraient pas nécessairement plus grands près d'une quelconque des courbes de la famille que près de toute autre, comme on le voit en les écrivant $\mp(e^{-c}\Delta c)e^x$ ou, à fort peu près, $e^x\Delta(\pm e^{-c}) = e^x\Delta C$, valeur indépendante de c ou de C si l'on suppose ΔC constant. On peut, dans un tel cas, dire que la droite $y = 0$ est une ligne asymptote, et la *seule* ligne asymptote, pour la famille des *courbes* $y = Ce^x$, tandis qu'elle ne le serait pas, ou du moins ne le serait pas plus que les autres lignes de la famille, si l'on n'avait en vue que l'étude des *fonctions* $y = Ce^x$.



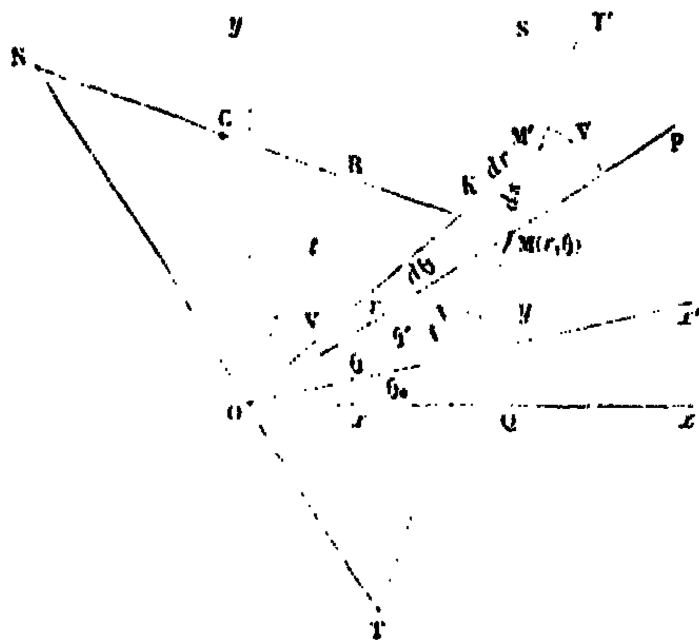
COMPLÉMENT A LA QUINZIÈME LEÇON.

COURBES PLANES EN COORDONNÉES POLAIRES; DE LA SPIRALE LOGARITHMIQUE.

130*. — Des spirales et des coordonnées polaires.

Imaginons qu'une droite OP tourne autour d'un point fixe O, appelé *pôle*, de manière que l'angle, θ, qu'elle fait dans le plan avec une droite fixe Ox, grandisse sans cesse jusqu'à un nombre quelconque de circonférences, après s'être trouvé nul à un certain moment (pris pour origine) et avoir été négatif avant ce moment; de plus, conce-

Fig. 26



vons qu'un point M se déplace le long de la droite OP, pendant que celle-ci tourne, et que, pour chaque valeur de θ, ce point M soit ainsi à une distance r du pôle exprimée par une fonction déterminée de θ, $f(\theta)$, qui ne devienne généralement pas la même quand θ croît de 2π, c'est-à-dire quand la droite OP revient à une position antérieure. Le point mobile M décrira dans ce double mouvement une certaine courbe AMS, que définit parfaitement l'équation $r = f(\theta)$ et qu'on

appelle une *spirale*; sa partie décrite pendant un tour complet de OP en est une *spire*.

L'angle θ, que l'on choisit ordinairement pour variable indépendante, se nomme, comme on sait, *angle polaire* ou *azimut*, et, la distance r, *rayon vecteur*. Ces deux variables r et θ, les plus naturelles qu'on puisse employer dans l'étude des mouvements qui se font sur un plan autour d'un point ou d'un axe, constituent ce qu'on appelle des *coordonnées polaires*. Enfin, la droite fixe Ox, à partir de laquelle se comptent les azimuts, est désignée sous le nom d'*axe polaire*.

Si on lui mène par le pôle une perpendiculaire Oy, dans la direction définie par l'azimut $\theta = \frac{\pi}{2}$, les deux distances positives ou négatives x et y du point M à ces axes Oy et Ox constitueront un système de coordonnées rectilignes qui a des rapports très simples avec les coordonnées polaires r et θ. En effet, dans le triangle rectangle OQM, x et y, ou OQ et QM, seraient évidemment $\cos\theta$ et $\sin\theta$, pour toutes les directions de OM, si OM ou r valait l'unité; et l'on a par suite $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, relations d'où l'on déduit, à l'inverse, en prenant soit les rapports respectifs de leurs membres, soit la somme de leurs carrés, $\tang\theta = \frac{y}{x}$, $r^2 = x^2 + y^2$.

L'équation $r = f(\theta)$, en coordonnées polaires, d'une courbe, devient donc en coordonnées rectangulaires $\sqrt{x^2+y^2} = f\left(\operatorname{arc tang} \frac{y}{x}\right)$, et elle prend une forme transcendante quand la proposée était algébrique. Inversement, si la courbe, en coordonnées rectangulaires, a son équation de la forme $F(x, y) = 0$, son équation en coordonnées polaires sera $F(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$. Celle-ci, quand la proposée était algébrique, ne contient pas directement l'angle polaire θ, mais seulement ses lignes trigonométriques $\cos\theta$, $\sin\theta$, de manière à donner pour r, x et y les mêmes valeurs quand θ croît de 2π. On peut donc n'y faire varier θ que dans un intervalle 2π, et même seulement dans un intervalle égal à π si l'on introduit des rayons r négatifs, à porter à l'opposé de ceux qui, pour même valeur de θ, seraient positifs; car on voit qu'un point déterminé par certaines valeurs $-r$, θ des deux coordonnées polaires, sera le même que celui où ces coordonnées auraient les valeurs r, $\theta + \pi$. Les expressions $r\cos\theta$, $r\sin\theta$ de x et de y continuent d'ailleurs à s'appliquer avec ces valeurs négatives de r: car les facteurs r et $\cos\theta$, r et $\sin\theta$, y changeant simplement de signe, donneront les mêmes produits.

151*. — Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale, différentielle de l'arc et rayon de courbure, en coordonnées polaires.

Soient : AS (p. 198*) une courbe étudiée en coordonnées polaires, r et θ les deux coordonnées d'un quelconque, M, de ses points; $r = f(\theta)$ son équation. Après avoir pris sur cette courbe, à partir du point M, un arc infiniment petit $MM' = ds$, correspondant à un accroissement élémentaire $MOM' = d\theta$ de l'angle polaire, menons la tangente TMM'T' et la normale MN, ainsi qu'une perpendiculaire TN au rayon vecteur, par le pôle O. On appelle *sous-tangente* la partie, OT, de cette perpendiculaire, qui est comprise entre le pôle et la tangente, *sous-normale*, la partie, ON, de la même perpendiculaire, qui va du pôle à la normale, enfin, *tangente* et *normale*, les segments MT et MN de la tangente et de la normale, qui, partant du point M de contact, aboutissent aux extrémités T et N de la sous-tangente et de la sous-normale.

Comme le rayon vecteur $OM = r$ est donné, toutes ces droites s'évalueront aisément si l'on peut connaître l'angle, V, que fait la tangente MT', menée du côté où θ grandit, avec le prolongement MP du rayon vecteur. Or, OM' se confondant à la limite avec OM, l'angle OMT, opposé et égal à V, peut être remplacé par OM'T; et, si l'on porte OM sur OM' (ou sur son prolongement), de manière à construire un triangle isoscèle MOK infiniment aigu en O et ayant par suite son angle K sensiblement droit, cet angle OM'T (ou son supplément KM'T) sera un des angles du triangle sensiblement rectangle MKM'. D'ailleurs, le côté KM' de celui-ci, différence $\pm dr$ des deux rayons vecteurs consécutifs OM, OM', vaudra $\pm r'\,d\theta = \pm f'(\theta)\,d\theta$; et l'autre côté KM de l'angle presque droit K, corde d'un arc de cercle décrit du point O comme centre avec $OM = r$ pour rayon, pourra être, à la limite, remplacé par cet arc $OM \times d\theta = r\,d\theta$. Le triangle M'KM différant aussi peu qu'on veut d'être rectangle, les côtés y ont entre eux ou avec les angles, sauf erreurs nulles à la limite, les mêmes relations que dans un triangle rectangle, et l'on peut écrire

$$KM = KM' \operatorname{tang} KM'T,$$

c'est-à-dire

$$r\,d\theta = (\pm dr)(\pm \operatorname{tang} V) = (r'\,d\theta) \operatorname{tang} V.$$

Il vient donc

$$(5) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} \qquad \text{ou} \qquad \cot V = \frac{r'}{r}, \qquad V = \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{r'}.$$

Telle est l'expression de l'angle V, qui définit la direction MT' de la

tangente. On en déduit aisément, comme il a été dit, les quatre longueurs ON, OT, MN, MT. Par exemple, le triangle OMN, rectangle en O, donne de suite

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OM}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{OMN} = r\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2} \mp \mathrm{V}\right) = \pm r \cot \mathrm{V} = \pm r'$$

et

$$\mathrm{MN} = \sqrt{\overline{\mathrm{OM}}^2 + \overline{\mathrm{ON}}^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

On a donc, en appelant, pour abréger, S_n la sous-normale, N la normale et en attribuant à la sous-normale le signe de r', ou la comptant positivement quand son azimut sera $\theta + \frac{\pi}{2}$, négativement quand il sera $\theta - \frac{\pi}{2}$:

$$(6) \qquad \mathrm{S}_n = r', \qquad \mathrm{N} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

La différentielle, $\mathrm{MM}' = ds$, de l'arc $\mathrm{AM} = s$ fonction de θ, ne s'obtient pas moins aisément; car dans le triangle, infiniment près d'être rectangle, M'KM, il vient, à la limite,

$$\mathrm{MM}' = \sqrt{\overline{\mathrm{MK}}^2 + \overline{\mathrm{KM}'}^2}$$

ou

$$(7) \qquad ds = \sqrt{r^2\,d\theta^2 + dr^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = \mathrm{N}\,d\theta.$$

Évaluons encore l'angle de contingence d'un arc élémentaire ds et, pour cela, menons par le pôle O une droite mobile Ot, constamment parallèle à la tangente, MT', au point (r, θ) que nous imaginerons se déplaçant le long de la courbe. Cette droite Ot fera avec le rayon vecteur correspondant OM l'angle V et, par suite, avec la direction fixe Ox, l'angle $\theta + \mathrm{V}$ ou $\theta + \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{r'}$. Si donc θ croît de $d\theta$, ou qu'on passe de M à M', la différentielle de xOt, *angle de contingence* cherché, sera successivement

$$d\theta + d \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{r'} = d\theta + \frac{r'^2 - rr''}{r'^2 + r^2}\,d\theta = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\,d\theta.$$

Enfin, divisons l'expression (7) de ds par cet angle de contingence, et nous obtiendrons, comme on sait, le rayon de courbure $\mathrm{MC} = \mathrm{R}$ de la courbe, pour le point considéré $\mathrm{M}(r, \theta)$:

$$(8) \qquad \mathrm{R} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

On portera sa valeur (8), à partir du point $\mathrm{M}(r, \theta)$, dans le sens MN

qui fait un angle aigu avec MO et *qui est celui de la normale* N, ou dans le sens opposé, suivant qu'elle sera positive ou négative, c'est-à-dire suivant que l'angle de contingence $d(xOt)$, de même signe, indiquera que, lorsqu'on passe de M à M', la tangente MT' tourne en s'inclinant du côté du pôle ou du côté opposé et détermine ainsi la concavité de la courbe à être dans le premier de ces deux sens ou dans le second.

Avant d'appliquer à la *spirale logarithmique* les formules générales ainsi établies, voyons ce qu'est cette courbe, ainsi que la plus remarquable des spirales après elle, dite *spirale d'Archimède*, la plus simple de toutes et la première qui ait été connue.

152*. — De la spirale d'Archimède et de la spirale logarithmique.

Le rayon vecteur, dans la spirale d'Archimède, et le logarithme du rayon vecteur, dans la spirale logarithmique, croissent de quantités proportionnelles aux accroissements correspondants de l'angle polaire : telles sont les définitions de ces deux spirales.

En d'autres termes, a et b désignant deux constantes, l'équation de la spirale d'Archimède est $r = a\theta + b$, et, l'équation de la spirale logarithmique, $\log r = a\theta + b$ ou $r = e^{a\theta+b}$. La constante a peut être supposée positive; car, si elle ne l'était pas, il suffirait de renverser le sens suivant lequel se comptent les angles polaires positifs, ou de remplacer θ par $-\theta$, pour que le terme $a\theta$ fût changé en $(-a)\theta$; ce qui y rendrait positif le coefficient de θ. Quant à la constante b, un changement convenable d'axe polaire la fait disparaître. Représentons, en effet, cette constante par $-a\theta_0$, en appelant θ_0 son quotient par $-a$, et choisissons comme nouvel axe Ox' (p. 198*) la droite, émanée du pôle, dont l'angle polaire par rapport à Ox est θ_0 pour la grandeur et pour le signe. Si nous désignons par θ' le nouvel angle polaire $x'OM$, égal à $xOM \mp xOx'$ ou à $\theta - \theta_0$, nous aurons évidemment

$$a\theta + b = a(\theta - \theta_0) = a\theta',$$

et les équations respectives des deux spirales deviendront bien $r = a\theta'$, $r = e^{a\theta'}$. C'est sous cette forme éminemment simple qu'on les prend d'ordinaire, en supposant effectué, comme on voit, un changement convenable d'axe polaire ou, ce qui revient au même, en imprimant à la courbe et à l'axe Ox', autour du pôle, une rotation égale à θ_0, dans le sens de Ox' vers Ox, de manière à diminuer de θ_0 les angles polaires de tous les rayons vecteurs; et l'on peut alors effacer l'accent de θ', puisque l'axe polaire est encore Ox.

Observons, à cet égard, que l'équation première de la spirale logarithmique, $r = e^{a\theta+b}$, pouvait aussi s'écrire $r = e^b e^{a\theta}$, ou $r = K e^{a\theta}$, en appelant K la quantité positive e^b, arbitraire entre o et ∞ lorsque b l'est entre $-\infty$ et ∞; d'où il suit que la rotation θ_0, qui réduit les rayons vecteurs $e^{a\theta+b}$ à $e^{a\theta}$ dans chaque direction de l'espace, a pour effet de les diviser par K. Donc, *quand on allonge ou qu'on raccourcit dans un même rapport quelconque tous les rayons vecteurs d'une spirale logarithmique, on obtient la même spirale, qui se trouve seulement avoir tourné autour du pôle d'un angle proportionnel au logarithme de ce rapport.* Or, en faisant varier ainsi proportionnellement les rayons vecteurs et, par suite, tous les éléments ds de la courbe proposée, sans y changer aucun angle, on produit des courbes qui lui sont semblables. Donc, *les spirales logarithmiques semblables sont égales entre elles;* et, *dans toute spirale logarithmique, deux arcs vus du pôle sous un même angle, mais d'ailleurs quelconques, sont semblables.*

Cela suppose évidemment qu'il y a des rayons vecteurs de toutes les grandeurs, et une infinité de spires, dans une spirale logarithmique. Effectivement, si l'on fait décroître θ de $+\infty$ à $-\infty$, $r = e^{a\theta}$ décroît sans cesse, depuis la valeur $+\infty$ jusqu'à la valeur limite zéro, de sorte que la courbe décrit une infinité de spires microscopiques autour du pôle. Celui-ci est appelé, pour cette raison, un *point asymptote.*

La propriété la plus remarquable de la spirale d'Archimède consiste en ce que, la dérivée r' ou $f'(\theta)$ s'y réduisant au coefficient a, *la sous-normale y est constante* d'après la première formule (6). Cette propriété permet de construire simplement la normale et, par suite, la tangente à la spirale d'Archimède.

153*. — Propriété caractéristique de la tangente à la spirale logarithmique.

Cherchons sous quel angle V les rayons vecteurs r, prolongés, coupent la spirale logarithmique dont l'équation est $r = e^{a\theta}$, ou, ce qui revient au même, quel angle ces rayons y font avec les tangentes respectives à la courbe. En différentiant l'expression $e^{a\theta}$ de r, il vient $r' = ae^{a\theta} = ar$; et, d'après (5), la cotangente de V se réduit à a. Donc, *la spirale logarithmique coupe tous ses rayons vecteurs sous un angle constant.*

C'est ce qu'on aurait pu prévoir quand on a remarqué que des parties d'une spirale logarithmique occupant, vues du centre, un

même espace angulaire, mais d'ailleurs quelconques, étaient semblables et devenaient même semblablement placées par l'effet d'une simple rotation autour du pôle ; car on sait que les angles homologues sont égaux dans les figures semblables.

Réciproquement, la propriété de couper les rayons vecteurs sous un angle constant n'appartient à aucune autre courbe que la spirale logarithmique. En effet, si, tout le long d'une courbe, $\cot V =$ une const. a, ou que, d'après (5), $\frac{r'}{r} = a$, c'est-à-dire $\frac{d \log r}{d\theta} = \frac{d.a\theta}{d\theta}$, les deux fonctions $\log r$, $a\theta$, ayant constamment même dérivée, ne peuvent différer que par une constante, b ; et il vient bien $\log r = a\theta + b$.

La valeur particulière la plus remarquable qu'on puisse donner à a est zéro. Alors $\cot V = a$ s'annule et $V =$ un droit ; ce qui est la propriété caractéristique des cercles décrits autour du pôle comme centre, car la relation $\cot V = 0$ revient, d'après (5), à poser $r' = 0$ ou $r =$ const. Ainsi, quand a est infiniment petit, la spirale logarithmique coupe à angle droit tous ses rayons vecteurs, et ses spires deviennent des cercles. Il est clair, en effet, que, la distance $r = e^{a\theta}$ au pôle croissant alors avec une lenteur infinie, la spirale se compose de spires, serrées les unes contre les autres, qui recouvrent tout le plan et équivalent à la famille des cercles concentriques décrits autour du pôle.

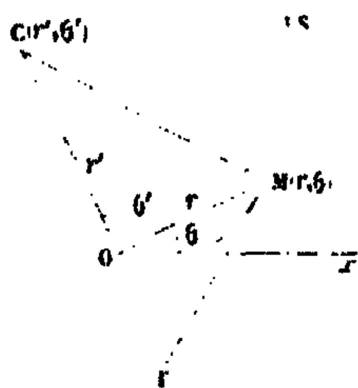
151*. — Rayon de courbure et développée de la spirale logarithmique.

L'équation $r = e^{a\theta}$ différentiée deux fois donne $r' = ae^{a\theta}$, $r'' = a^2 e^{a\theta}$ et, par suite, $r'^2 = rr''$. Alors le dénominateur de l'expression (8) du rayon R de courbure se réduit à $r^2 + r'^2$ et il vient, en tenant compte de la seconde (6), $R = \sqrt{r^2 + r'^2} = N$ tant pour la grandeur que pour le signe. C'est ce qu'on aurait vu encore plus directement, en observant que la constance de V réduit l'angle de contingence $d(\theta + V)$ à $d\theta$ et, par suite, le rayon R de courbure au rapport $\frac{ds}{d\theta}$, qui vaut bien N d'après le dernier membre de (7). Donc, *dans la spirale logarithmique, le rayon du cercle osculateur est égal à la normale, et le centre de courbure coïncide avec l'extrémité de la sous-normale.*

Cherchons, d'après cela, l'équation de la développée, c'est-à-dire du lieu des centres de courbure C. Leur angle polaire xOC, que nous appellerons θ', est égal, comme on voit, à xOM + MOC ou à $\theta + \frac{\pi}{2}$; et l'on a $\theta = \theta' - \frac{\pi}{2}$. D'autre part, leur rayon vecteur OC,

n'étant autre que la sous-normale, a pour expression, vu la première formule (6), la dérivée $r' = ae^{a\theta} = e^{a\theta+\log a}$ du rayon vecteur OM. Continuons à le désigner par r' et, en y exprimant θ en fonction de θ',

Fig. 27.



comme il vient d'être fait, on aura, entre les deux coordonnées r' et θ' des centres C de courbure, l'équation de la développée

$$r' = e^{a\left(\theta'-\frac{\pi}{2}\right)+\log a} = e^{a\left(\theta'-\frac{\pi}{2}+\frac{\log a}{a}\right)}.$$

On reconnait dans cette courbe une spirale logarithmique décrite autour du même pôle que la proposée et qui, si l'on y compte les angles polaires à partir du rayon vecteur pour lequel on a $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\log a}{a}$, devient ce qu'est la proposée $r = e^{a\theta}$ par rapport à l'axe Ox. Donc *la spirale logarithmique a pour développée une courbe égale, obtenue en la faisant simplement tourner, autour du pôle, de l'angle* $\frac{\pi}{2} - \frac{\log a}{a}$, *dans le sens suivant lequel grandissent ses rayons vecteurs et se comptent les angles polaires positifs*. Si la constante a était telle, que cette rotation se réduisît à un nombre exact n de tours, le rayon vecteur OC, égal à $e^{a(\theta'-2n\pi)}$, coïnciderait avec celui de la spirale proposée dont l'angle polaire est $\theta' - 2n\pi$; et la courbe serait à elle-même sa propre développée.

Il est curieux que les deux lignes les plus remarquables étudiées dans cette quinzième Leçon, savoir la cycloïde et la spirale logarithmique, possèdent en commun la propriété d'avoir pour développées des courbes qui leur sont égales.

On reconnaîtrait aisément que non seulement l'extrémité C de la sous-normale, mais aussi l'extrémité T de la sous-tangente, décrit une spirale pareille à la proposée; et nous avons vu plus haut que l'on retombe encore sur cette même courbe quand on veut en construire

d'autres qui lui soient semblables. Le caractère général de la spirale logarithmique est donc une extrême tendance à renaître de ses transformations, due à ces deux propriétés corrélatives, que possèdent les exponentielles, de se reproduire dans la différentiation, et de se multiplier entre elles par la simple addition de leurs exposants (quand elles ont même base).



COMPLÉMENT A LA SEIZIÈME LEÇON.

SUR LES POINTS SINGULIERS DES COURBES GAUCHES.

157*. — Supériorité de la forme implicite des équations sur leur forme explicite, pour représenter à la fois la totalité d'une courbe gauche; points singuliers.

Nous avons vu (p. 49*) que les surfaces représentées par les deux équations $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$, où l'on appelle F, Φ des fonctions continues et à dérivées premières continues, ressemblent à un plan (qui est leur plan tangent) dans une étendue infiniment petite autour de chacun de leurs points, sauf autour des *points singuliers*, n'existant que sur des surfaces exceptionnelles où s'annuleraient à la fois les trois dérivées en x, y, z soit de F, soit de Φ. Autrement dit, pour se rendre d'un point (x, y, z) de l'une de ces surfaces à tout autre point infiniment voisin qui leur appartienne aussi, il faut suivre une direction infiniment peu inclinée sur leur plan tangent en (x, y, z); d'où il suit que, si le point (x, y, z) fait partie de la courbe $F = 0$, $\Phi = 0$ d'intersection des deux surfaces, et que leurs deux plans tangents en ce point ne se confondent pas, mais se coupent sous un angle sensible ou aient eux-mêmes une intersection déterminée se prolongeant en deux sens opposés de part et d'autre de (x, y, z), ce sera, dans chaque sens, suivant une direction infiniment voisine de celle de cette intersection, qu'il faudra marcher, pour aller à un second point de la même courbe $F = 0$, $\Phi = 0$ commune aux deux surfaces.

Et l'on trouvera effectivement, de chaque côté, un point de cette courbe, dans tout plan voisin qui rencontre à une très petite distance δ de (x, y, z) l'intersection des deux plans tangents en (x, y, z). Car ce plan coupera les deux plans tangents suivant deux droites concourantes, et les deux surfaces suivant deux courbes, se confondant, à des écarts près infiniment moindres que δ, avec ces deux droites, jusqu'à des distances de l'ordre de δ de part et d'autre de leur point de concours. Or chacune des deux droites, coupant l'autre et s'en éloignant indéfi-

niment des deux côtés du point commun, ne pourra éviter de franchir aussi la courbe presque contiguë ou qui ne s'éloigne qu'extrêmement peu de cette seconde droite; et l'autre courbe, qui suit la première droite dans son cours et qui passe ainsi, comme elle, d'un côté à l'autre de la seconde courbe, ne la coupera pas moins.

Mais le point d'intersection des deux courbes sera unique. En effet, les plans tangents qu'on peut y mener aux deux surfaces, étant sensiblement parallèles, vu la continuité de celles-ci, aux deux plans tangents en (x, y, z), le plan des courbes coupera ces deux systèmes de plans sensiblement parallèles suivant deux couples de droites presque parallèles aussi dans chaque couple; en sorte que les deux, d'entre ces quatre droites, menées tangentiellement aux deux courbes en leur point d'intersection, feront entre elles un angle presque égal à celui des deux autres, qui est de grandeur appréciable; et les deux courbes, ayant ainsi en leur point commun des tangentes différentes, s'écarteront sans cesse l'une de l'autre à partir de leur point commun jusqu'aux distances sensibles, de manière à ne pas se rejoindre tout près.

Donc la ligne gauche présentera, dans le voisinage de son point quelconque (x, y, z), une branche et une seule se prolongeant sans jarret de part et d'autre, si l'on excepte les deux cas : 1°, où les surfaces $F=0$, $\Phi=0$ auraient en ce point (x, y, z) plan tangent commun; 2°, où le point (x, y, z) serait singulier sur l'une ou sur l'autre des deux surfaces. Le premier cas est de beaucoup le moins rare. En effet, l'identité des deux plans tangents en (x, y, z) exige simplement qu'il y ait, dans leurs équations respectives (3) [p. 231], proportionnalité des coefficients de x_1-x, y_1-y, z_1-z; ce qui, joint aux équations mêmes des deux surfaces, donne en tout, entre les *trois* coordonnées x, y, z de ces *points singuliers de la courbe,* les *quatre* relations

$$(4)\qquad F=0,\qquad \Phi=0,\qquad \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{d\Phi}{dx}}=\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{d\Phi}{dy}}=\frac{\frac{dF}{dz}}{\frac{d\Phi}{dz}}.$$

Or il y aurait cinq équations à vérifier, si le point (x, y, z) devait être un point singulier de l'une des surfaces, de la première par exemple, savoir l'égalité à zéro de F, de ses trois dérivées en x, y, z et de Φ : conditions qui, pour le dire en passant, satisfont au système (4). Ainsi, les points qui seront singuliers sur la courbe ne le seront généralement sur aucune des deux surfaces dont elle constitue l'intersection, et, cependant, les courbes gauches qui en présenteront se trou-

veront très exceptionnelles, puisqu'il faudra que le système (4) de quatre équations à trois inconnues y soit compatible. C'est dire que la courbe gauche en sera dépourvue le plus souvent et formera bien une ligne continue, sans arrêt, ni coude brusque, ni bifurcation.

Il est aisé de voir quels seront les points singuliers les moins rares. Imaginons, à cet effet, que, par l'ordonnée z d'un point (x, y, z) vérifiant les équations (4), on mène une infinité de plans, distingués les uns des autres au moyen de leurs *traces* sur le plan des xy; et soient $x + \mathrm{H}t$, $y + \mathrm{K}t$ les coordonnées d'un point de l'une de ces traces, $\mathrm{H}t$, $\mathrm{K}t$ désignant de petits accroissements variables reçus à partir de (x, y) par ces coordonnées, le long de la trace, qu'un mobile sera censé parcourir uniformément depuis le temps t. Soit enfin, d'autre part, l la différence des ordonnées menées suivant les z aux deux surfaces $\mathrm{F} = 0$, $\Phi = 0$ en partant du point $(x + \mathrm{H}t, y + \mathrm{K}t)$ du plan des xy. Il est clair que cette différence de deux ordonnées fonctions généralement *graduelles* des deux variables $x + \mathrm{H}t$, $y + \mathrm{K}t$, en sera une nouvelle fonction analogue $\psi(x + \mathrm{H}t, y + \mathrm{K}t)$. D'ailleurs les deux surfaces possédant en (x, y, z) même plan tangent, leurs deux coupes par chaque plan sécant mené suivant l'ordonnée z y ont la même tangente, intersection du plan tangent commun par le plan sécant; ce qui signifie que les ordonnées, fonctions de t, des deux coupes, ont même dérivée pour $t = 0$, ou que la dérivée de leur différence l s'annule alors. Cette différence l, nulle elle-même à cet instant, s'y trouve donc minimum ou maximum suivant que sa dérivée seconde par rapport à t, savoir

$$(5) \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2}\mathrm{H}^2 + 2\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\mathrm{HK} + \frac{d^2\psi}{dy^2}\mathrm{K}^2,$$

y a le signe *plus* ou le signe *moins*; et, dans le premier cas, l est positif aux environs du point (x, y, z) sur le plan sécant considéré, tandis qu'il y est négatif dans le second. Or, d'ordinaire, l'expression (5) ne s'annule pas identiquement, mais prend, comme on sait, ou le même signe pour toutes les valeurs possibles du rapport de K à H, ou signes différents dans les angles voisins formés par deux certains plans sécants sur lesquels l'expression (5) devient alors nulle. Il est clair que, dans le premier cas, l'écart l des deux surfaces ne se réduira nulle part à zéro autour du point (x, y, z); et celui-ci sera un *point isolé*. Au contraire, dans le second cas, l'écart l changera de signe près des deux plans où s'annulera l'expression (5); et une démonstration déjà donnée dans un cas analogue (p. 157*) prouve que deux branches de courbe se croiseront en (x, y, z) : ce point sera donc un *point double*.

COMPLÉMENT A LA DIX-SEPTIÈME LEÇON.

DE LA CAMBRURE OU TORSION DES COURBES GAUCHES; ETC.

163*. — Cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale.

Il est naturel de mener la normale principale, à partir du point (x, y, z) de la courbe, du côté où est le centre du cercle osculateur. Alors ses trois cosinus directeurs sont ceux du rayon R et valent les rapports à R des trois projections $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ exprimées par (24) [p. 247]. La normale principale fera donc, avec les axes des x, y, z, des angles ayant respectivement pour cosinus

$$(25)\qquad \mathrm{R}x'', \quad \mathrm{R}y'', \quad \mathrm{R}z''.$$

Cette normale étant ainsi définie, en même temps que la tangente dont les cosinus directeurs sont x', y', z' d'après les formules (8) [p. 234], convenons enfin de tirer la binormale, à partir du même point (x, y, z), dans un sens tel, par rapport à la tangente et à la normale principale, que, si l'on faisait tourner l'ensemble de ces trois droites de manière à amener la double coïncidence de la tangente avec l'axe des x positifs et de la normale principale avec celui des y positifs, la binormale elle-même coïncidât avec l'axe des z positifs.

Pour plus de généralité, appelons respectivement a, b, c et a', b', c' les cosinus directeurs de deux droites rectangulaires, dont nous désignerons simplement les directions par ces cosinus mis entre parenthèses; et soient A, B, C les cosinus directeurs, à évaluer, d'une perpendiculaire commune à ces deux droites, menée ainsi dans un sens tel, qu'elle soit, par rapport aux deux directions (a, b, c) et (a', b', c'), ce qu'est la direction des z positifs par rapport à celles des x et des y positifs. Des conditions connues, $a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} = 0$, $a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} = 0$, exprimant la perpendicularité de cette troisième droite sur les deux premières, il résulte, comme on sait, la proportionnalité de A, B, C aux trois binômes $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$; et, vu d'ailleurs que la somme des carrés A^2, B^2, C^2 doit être l'unité, les cosinus A, B, C égaleront les quotients respectifs de

ces trois binômes par l'une des deux racines carrées de la somme

$$(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2.$$

Or la valeur de cette somme est identiquement

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2,$$

comme on le reconnaît en développant les calculs ; de plus, elle se réduit à l'unité, ou a pour racines carrées ± 1, par suite de l'égalité à 1 de chacune des deux sommes $a^2+b^2+c^2$, $a'^2+b'^2+c'^2$, avec la condition $aa'+bb'+cc'=0$, qu'entraîne la perpendicularité mutuelle des directions (a, b, c), (a', b', c'). Il vient donc

(26) $\quad \mathrm{A} = \pm(bc'-cb'), \quad \mathrm{B} = \pm(ca'-ac'), \quad \mathrm{C} = \pm(ab'-ba')$;

et il ne reste plus qu'à savoir lequel, du signe supérieur + ou du signe inférieur —, il faut adopter dans ces trois formules. A cet effet, observons que, si l'ensemble des trois droites rectangulaires tourne arbitrairement dans l'espace, leurs neuf cosinus directeurs varieront avec continuité et ne pourront changer de signe qu'en s'annulant. Or A, B, C, exprimés sans cesse par les formules (26), ne s'annuleront jamais à la fois, puisque la somme de leurs carrés est constamment 1. Il n'y aura donc aucun moment où puisse se faire le passage du signe supérieur + au signe inférieur —, ou *vice versa*, passage qui entraînerait une variation brusque de l'un au moins de ces trois cosinus A, B, C, dont la valeur ne s'annulerait pas ; et, par conséquent, le même signe conviendra dans toutes les positions possibles du système rigide formé par les trois droites. Mais, si nous considérons en particulier celle où les deux droites (a, b, c), (a', b', c') coïncident avec les deux axes des x et des y positifs, et où les valeurs de a, b, c, a', b', c' sont respectivement 1, 0, 0, 0, 1, 0, ces formules (26) donnent $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=\pm 1$. Or elles ne sont exactes qu'en adoptant le signe supérieur +, car alors la droite (A, B, C) coïncide avec l'axe des z positifs ou se trouve définie en direction par les cosinus 0, 0, 1. C'est donc constamment avec le signe supérieur qu'il faudra prendre les formules (26) ; et l'on aura, pour les expressions cherchées de A, B, C,

(27) $\quad \mathrm{A} = bc'-cb', \quad \mathrm{B} = ca'-ac', \quad \mathrm{C} = ab'-ba'.$

Dans le cas de la binormale, a, b, c sont les cosinus directeurs x', y', z' de la tangente et a', b', c' sont ceux, $\mathrm{R}x''$, $\mathrm{R}y''$, $\mathrm{R}z''$, de la normale principale. Il vient donc

(28) $\quad \mathrm{A} = \mathrm{R}(y'z''-z'y''), \quad \mathrm{B} = \mathrm{R}(z'x''-x'z''), \quad \mathrm{C} = \mathrm{R}(x'y''-y'x'').$

Il sera sans inconvénient de désigner ainsi par les mêmes lettres A, B, C les cosinus directeurs de la binormale et les trois coefficients A, B, C figurant dans l'équation (11) [p. 236] du plan osculateur, qui leur sont simplement proportionnels; car ces coefficients n'ont été déterminés jusqu'ici qu'à un facteur constant près, et rien n'empêche, tout en leur laissant leur signification antérieure, d'en fixer désormais la valeur d'une manière plus complète, en leur faisant représenter (quand les axes sont rectangles) les cosinus directeurs de la binormale.

167*. — Calcul de l'angle de deux droites voisines, définies par leurs cosinus directeurs.

Il nous reste à voir si l'angle de contingence, évalué au moyen des tangentes MT, M'T' [p. 248], ou de leurs parallèles Ot, Ot', aura bien la valeur (30) [p. 249]. A cet effet, comme les droites Ot, Ot' sont définies au moyen de leurs cosinus directeurs, nous aurons à résoudre le problème suivant :

Étant donnés les cosinus directeurs, que j'appellerai respectivement a, b, c et a', b', c', *de deux droites Ot, Ot' très peu inclinées l'une sur l'autre, calculer le petit angle qu'elles forment.*

Donnons à chacune de ces droites issues de l'origine une longueur égale à 1. Alors les trois coordonnées de t, projections de Ot sur les axes, seront les produits respectifs de 1 par a, b, c et égaleront a, b, c. De même, les trois coordonnées de t' seront a', b', c'; et la droite tt', ayant pour projections sur les axes les différences $a'-a$, $b'-b$, $c'-c$, vaudra $\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2}$.

Or, dans le triangle isoscèle tOt', la base tt' est le double du côté tp de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse Ot égale 1 et dont l'angle opposé tOp vaut $\frac{tOt'}{2}$. Il vient donc

$$tt' = 2tp = 2\sin\frac{tOt'}{2},$$

et, par suite, vu la valeur précédente de tt',

$$(31) \qquad 2\sin\frac{tOt'}{2} = \sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2}.$$

Cette formule (31) est bien d'accord avec l'expression connue, $aa'+bb'+cc'$, de $\cos tOt'$ (peu avantageuse par elle-même dans le cas d'angles infiniment petits, comme toute formule contenant des cosinus). Car la quantité sous le radical, développée, donne les deux sommes $a^2+b^2+c^2$, $a'^2+b'^2+c'^2$, dont chacune vaut 1, plus l'ex-

pression $-2(aa'+bb'+cc')$. Or, si l'on remplace celle-ci par $-2\cos tOt'$, le radical, réduit à $\sqrt{2(1-\cos tOt')}$, ne diffère pas de $\sqrt{4\sin^2\frac{tOt'}{2}}$, ni, par suite, du premier membre de (31).

Comme on se propose de n'appliquer la relation (31) qu'à des angles tOt' infiniment petits, le sinus de leur moitié peut être remplacé par l'arc correspondant, et l'on trouve simplement

$$(32)\qquad tOt' = \sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2}.$$

169*. — Angle de contingence, calculé par les tangentes.

Dans le cas actuel, les cosinus directeurs de Ot (p. 248), ou de la tangente MT menée au point (x, y, z), sont les trois dérivées x', y', z' des coordonnées x, y, z par rapport à l'arc s; et les cosinus directeurs de Ot', ou de M'T', sont les mêmes dérivées, accrues de leurs différentielles $x''ds$, $y''ds$, $z''ds$ le long de l'arc infiniment petit MM' ou ds. Les différences $a'-a$, $b'-b$, $c'-c$ vaudront donc $x''ds$, $y''ds$, $z''ds$; et l'angle de contingence tOt', ou $d\theta$, aura bien pour expression, d'après (32), le dernier membre de (30) [p. 249].

On remarquera, comme dans la question analogue relative aux courbes planes (p. 200), que la comparaison de la valeur ainsi trouvée pour $d\theta$ avec son autre expression, $\frac{ds}{R}$, obtenue par la considération des plans normaux, ferait connaître la formule (23) de R [p. 247], si on ne l'avait pas établie autrement.

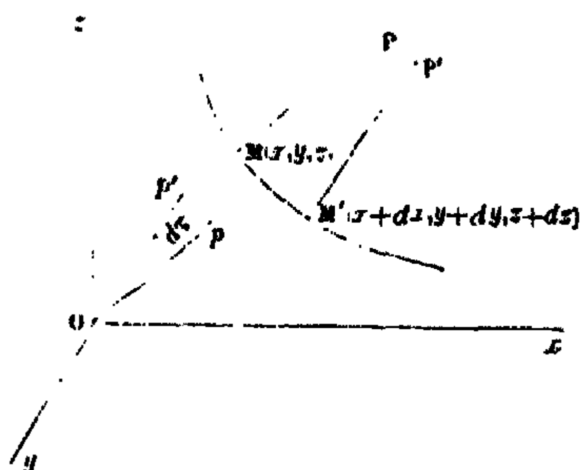
170*. — Angle de torsion d'un arc infiniment petit de courbe gauche.

Ce qui distingue une courbe plane d'une courbe gauche, c'est que tous ses plans osculateurs ont même direction et se confondent par suite entre eux pour donner le plan unique de la courbe. Au contraire, dans une ligne gauche, la direction du plan osculateur varie d'un point à l'autre. Le changement de cette direction le long d'un arc infiniment petit MM' ou ds (p. 214*) est mesuré par celui même de la perpendiculaire au plan osculateur, ou binormale, qui a la position MP à la première extrémité, la position M'P' à la seconde, et tourne ainsi, le long de l'arc intercepté, de l'angle pOp' de deux droites menées à partir de l'origine respectivement parallèles à MP et à M'P'. Comme cet angle pOp' serait nul dans une courbe plane, il fournit une mesure de la différence existant de M à M' entre la courbe gauche proposée

et une courbe plane, ou de ce qu'on pourrait appeler le *gauchissement* de l'arc MM'. Il a reçu, pour une raison qu'on verra bientôt, le nom d'*angle de torsion*. Nous le représenterons par $d\tau$.

Évaluons-le au moyen de la formule (32), dans laquelle il faudra remplacer, d'une part, tOt' par $pOp' = d\tau$, d'autre part, a, b, c par les cosinus directeurs A, B, C de la binormale MP, et, de même, a', b', c' par ceux de la binormale M'P', qui sont A, B, C accrus de leurs

Fig. 28.



différentielles $A'ds$, $B'ds$, $C'ds$ le long de l'arc MM' ou ds. Il viendra

$$(34)\qquad d\tau = \sqrt{(A'ds)^2 + (B'ds)^2 + (C'ds)^2} = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}\,ds.$$

Reste à évaluer les trois dérivées A', B', C'. On y arriverait en différentiant les expressions (28) de A, B, C. Mais il est plus simple de différentier les trois relations qui ont servi à trouver ces expressions (28), savoir

$$(35)\qquad A^2 + B^2 + C^2 = 1,\qquad Ax' + By' + Cz' = 0,\qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

La première (divisée par 2) et la deuxième donnent de la sorte

$$AA' + BB' + CC' = 0,\qquad x'A' + y'B' + z'C' + Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

Or celles-ci déterminent simplement les rapports mutuels de A', B', C', après qu'on a supprimé de la seconde la partie $Ax'' + By'' + Cz''$, nulle en vertu de la troisième (35); et elles sont d'ailleurs satisfaites par la substitution à A', B', C' de x'', y'', z'', qui les change respectivement en la troisième (35) et en la seconde relation (9) [p. 235] toujours vérifiée quand les axes sont rectangulaires et l'arc s pris pour variable. Donc, en somme, la différentiation des deux premières relations (35) conduit à poser la double proportion

$$(36)\qquad \frac{A'}{x''} = \frac{B'}{y''} = \frac{C'}{z''} = \frac{A'x'' + B'y'' + C'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

à laquelle j'ai adjoint un quatrième rapport égal, formé par l'addition terme à terme des trois premiers après multiplication respective des termes, *haut et bas*, par x'', y'', z''. Mais la différentiation, effectuée également, de la troisième relation (35) donne

$$A'x'' + B'y'' + C'z'' = -(Ax''' + By''' + Cz'''),$$

ou, vu les valeurs (28) de A, B, C,

$$A'x'' + B'y'' + C'z'' = -R\omega,$$

en appelant ω, pour abréger, le déterminant formé par les neuf dérivées premières, secondes et troisièmes de x, y, z,

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= (y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z''' \\ &= x'(y''z''' - z''y''') + y'(z''x''' - x''z''') + z'(x''y''' - y''x'''). \end{aligned} \right.$$

Le quatrième rapport (36) s'écrira donc simplement, en rappelant l'expression (23) de R [p. 247], $-R^3\omega$. Et il résultera des trois premiers rapports (36) comparés séparément au quatrième les formules cherchées des dérivées A′, B′, C′ :

$$(38)\qquad A' = -R^3\omega x'', \qquad B' = -R^3\omega y'', \qquad C' = -R^3\omega z''.$$

Grâce à ces valeurs simples [1], l'angle de torsion $d\tau$, exprimé par le troisième membre de (34), sera, en observant que la somme $x''^2 + y''^2 + z''^2$ est l'inverse de R^2 et prenant le résultat en valeur absolue,

$$(39)\qquad d\tau = \sqrt{R^4\omega^2}\, ds = \pm R^2\omega\, ds.$$

Si donc on divise par ds et qu'on substitue à R et à ω leurs valeurs explicites données, le rapport de l'angle de torsion à l'arc ds résultera de la formule

$$(40)\quad \frac{d\tau}{ds} = \pm \frac{x'(y''z''' - z''y''') + y'(z''x''' - x''z''') + z'(x''y''' - y''x''')}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

171*. — De la cambrure en un point d'une courbe gauche.

Le rapport de $d\tau$ à ds que nous venons d'évaluer, et qui exprime en quelque sorte, pour le point considéré (x, y, z), le degré de gauchissement de la courbe, c'est-à-dire le changement de direction de son plan osculateur par unité de longueur de son arc, est souvent appelé la *seconde courbure* de la courbe, à cause de l'analogie qu'il présente

---

[1] Dues à M. Frenet, ancien professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

avec la courbure ordinaire, laquelle est aussi le rapport d'un angle infiniment petit $d\theta$ mesurant un changement de direction à l'arc ds le long duquel ce changement a lieu. Mais cette dénomination de *seconde courbure* est impropre; car, dans la ligne *droite,* à laquelle il serait absurde d'attribuer une courbure quelconque, le rapport de $d\tau$ à ds n'est pas nul, mais seulement indéterminé, rien n'empêchant de prendre pour plans osculateurs, aux différents points d'une droite, des plans quelconques menés suivant cette droite et de direction arbitrairement variable en fonction de s. C'est ce qu'a remarqué M. de Saint-Venant, qui a proposé d'appeler plutôt ce rapport $\frac{d\tau}{ds}$ la *cambrure* de la courbe.

De même, par analogie avec le rapport $\frac{ds}{d\theta}$ inverse de $\frac{d\theta}{ds}$ et qui représente le rayon de courbure R, on appelle quelquefois le rapport $\frac{ds}{d\tau}$ *rayon de seconde* courbure, expression qu'il faut remplacer par *rayon de cambrure :* c'est une ligne, comme R, mais qui ne comporte pas une signification géométrique aussi simple.

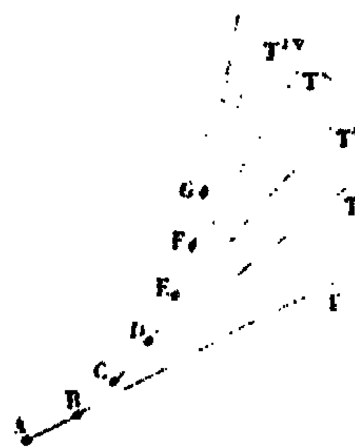
Remarquons que l'expression (33) [p. 250] de la courbure ne contient que les dérivées secondes des coordonnées par rapport à l'arc, tandis que, au contraire, celle, (40), de la cambrure dépend à la fois de leurs dérivées premières, secondes et troisièmes. C'est dire qu'il faut, pour déterminer la cambrure, se donner sur la courbe quatre points infiniment voisins, et non plus seulement trois comme pour la courbure. On pouvait le prévoir; car lorsqu'il s'agit de décider si la courbe est ou n'est pas plane, quatre points consécutifs sont bien nécessaires, puisque les trois premiers ne font que déterminer un plan, dont le quatrième seul peut sortir.

172*. — Comment toute courbe gauche peut se déduire, par torsion, d'une courbe plane.

La cambrure, rapport de $d\tau$ à ds, s'appelle encore la *torsion* de la courbe gauche par unité de longueur, au point considéré : elle exprime, en effet, ce que deviendrait pour un arc égal à 1, compté à partir de ce point, l'angle de torsion qui est $d\tau$ pour un arc infiniment petit ds, s'il continuait à croître sur cette longueur finie 1 comme il le fait sur la longueur ds. Mais la dénomination même d'angle de torsion a besoin d'être expliquée; et c'est par là que je terminerai l'étude des propriétés générales les plus importantes des courbes.

Prenons, sur la courbe donnée, des points très rapprochés A, B, C, D, E, ..., qui se succèdent d'une manière graduelle, comme, par exemple, à des distances *ds* égales. Nous commettrons évidemment des erreurs partout fort petites, en remplaçant les vrais plans osculateurs en A, B, C, ..., respectivement, par les plans ABC, BCD, CDE, ... dont chacun contient trois points consécutifs ou deux cordes successives AB et BC, BC et CD, etc. Celles-ci, prolongées en T, T', T'', ..., pourront de même être substituées aux tangentes à la courbe. Alors l'angle, dit de *torsion*, correspondant à l'arc élémentaire AB, ne différera pas sensiblement de l'angle des deux plans ABC, BCD; car deux plans mobiles, toujours presque confondus ensemble, dont l'un prendrait successivement et avec continuité les positions ABC, BCD, CDE, ... tandis que l'autre deviendrait successivement osculateur à la courbe en A, en B, en C, ..., ne pourraient manquer d'éprouver à fort peu près, d'un instant à l'autre, les mêmes changements d'orientation (¹), ou de tourner des mêmes quantités; d'où il suit que les vrais angles de torsion, décrits par le second, ne différeraient pas dans un rapport sensible des angles décrits par le premier et compris entre les plans consécutifs ABC, BCD, etc., ... De même, les angles TBT', T'CT'', ..., compris entre les prolongements des cordes contiguës, peuvent être pris pour ceux de contingence des arcs respectifs AB, BC, ...; ce que montrerait la considération analogue de deux droites mobiles d'une manière graduelle et toujours presque confondues ensemble, dont l'une prendrait successivement les positions AB, BC, CD, ..., tandis que l'autre, sans cesse tangente, toucherait successivement la courbe en A, en B, en C, etc., ou décrirait dans sa rotation les vrais angles de contingence.

Fig. 29.



Cela posé, et le plan osculateur ABTT' restant fixe, imaginons qu'on fasse tourner, autour de BCT' comme charnière, toute la partie BCDE..., de la courbe, qui suit le point B, d'un angle égal à l'angle de torsion de AB, c'est-à-dire au dièdre des deux plans ABC, BCD, de manière à amener le point D dans le premier plan osculateur ABC, sans changer l'angle de contingence T'CT''. Puis, autour de la nouvelle position de CDT'' comme charnière, faisons tourner de même

(¹) Définis analytiquement au moyen des variations qu'éprouveraient, par exemple, leurs cosinus directeurs.

la partie suivante CDEF...., d'un angle égal à celui de torsion de l'arc BC; de manière à amener le point E dans le plan ABCD, sans modifier l'angle de contingence T″DT‴. En continuant de même, c'est-à-dire en effectuant, autour des *tangentes* successives BC, CD, DE,... des rotations de la partie de courbe qui suit leur point de contact, de manière à amener peu à peu tous les angles de contingence, sans changer leur valeur, dans le plan TBT′, on aura finalement (si A, B, C, D, E, ... deviennent d'ailleurs infiniment voisins) transformé la courbe gauche proposée en une courbe plane, dont les arcs élémentaires AB, BC, CD, ... auront conservé non seulement leurs longueurs, mais aussi leurs angles de contingence et, par suite, leurs rayons de courbure primitifs.

Or il est évident que, pour revenir de la courbe plane ainsi obtenue à la courbe gauche, il suffira d'effectuer les mêmes mouvements en sens inverse; c'est-à-dire de faire tourner toute la partie BCDE... autour de BT′ comme charnière et d'un angle égal à l'angle de torsion relatif à AB, puis d'opérer des rotations analogues autour des autres tangentes CT″, DT‴, etc. Mais on appelle justement *torsion* d'un corps le mode de déformation qui consiste à faire tourner autour d'un axe toute la partie du corps située au delà d'un point considéré de l'axe, tandis que la partie en deçà reste fixe, ou, du moins, la superposition d'une infinité de déformations pareilles, ayant pour effet général d'imprimer des rotations de plus en plus grandes aux parties du corps de plus en plus éloignées de sa première extrémité (supposée fixe). Par conséquent, *toute courbe gauche est une courbe plane tordue, ou peut être déduite d'une courbe plane au moyen de simples torsions effectuées autour de ses tangentes et qui ne changent ni la longueur, ni la courbure de ses arcs.*

Ces torsions sont mesurées, pour chaque arc infiniment petit ds, par l'inclinaison $d\tau$ qu'acquièrent les deux plans osculateurs menés à ses deux extrémités et qui étaient d'abord confondus avec le plan de la courbe primitive. Il était donc bien naturel d'appeler l'angle $d\tau$ angle de torsion et de prendre, en chaque endroit, le rapport $\frac{d\tau}{ds}$ pour mesure, tout à la fois, et de la *cambrure* qui y distingue la courbe d'une courbe plane, et de la torsion qui est censée avoir fait naître cette cambrure.



COMPLÉMENT A LA DIX-HUITIÈME LEÇON.

POINTS SINGULIERS DES SURFACES; DÉVELOPPABLE CIRCONSCRITE A DEUX SURFACES; DÉTERMINATION D'UNE SURFACE PAR L'ENSEMBLE DE SES PLANS TANGENTS; LIGNES DE PENTE; ETC.

174*. — Coup d'œil sur les points singuliers des surfaces courbes : points isolés et points coniques.

Mais, revenant aux surfaces définies par une équation de la forme $F(x, y, z) = c$, jetons un coup d'œil sur le cas exceptionnel où les trois dérivées de F en x, y, z s'annuleraient au point considéré (x, y, z), afin de voir quelles sortes de singularités on y observera le plus ordinairement. Il nous suffira de procéder comme nous avons fait (p. 156*) dans l'étude des points singuliers d'une famille de courbes planes. Nous supposerons que, parcourant un chemin variable l le long de droites menées par le point considéré (x, y, z), on se trouve successivement en des points qui aient les coordonnées $x_1 = x + \mathrm{H}l$, $y_1 = y + \mathrm{K}l$, $z_1 = z + \mathrm{L}l$, où H, K, L désignent trois coefficients dont les rapports mutuels caractérisent la direction de la droite. Les deux dérivées première et seconde, par rapport à l, de la fonction de point F seront évidemment, en (x, y, z), l'une, égale à zéro par suite de l'annulation supposée des trois dérivées premières de F en x, y, z, et l'autre, exprimée par

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2F}{dx^2}\mathrm{H}^2 + \frac{d^2F}{dy^2}\mathrm{K}^2 + \frac{d^2F}{dz^2}\mathrm{L}^2 \\ &\qquad + 2\frac{d^2F}{dy\,dz}\mathrm{KL} + 2\frac{d^2F}{dz\,dx}\mathrm{LH} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\mathrm{HK}. \end{aligned} \right.$$

Ce sextinôme, homogène du second degré en H, K, L, n'est pas, en général, identiquement nul; et il arrive d'ordinaire, ou qu'il garde constamment le même signe sans s'annuler, ou qu'il change de signe et, par conséquent, s'annule pour une infinité de directions, définies par les rapports correspondants de H, K, L. Comme la fonction F se trouve évidemment minima, au point (x, y, z), le long de toute droite pour laquelle l'expression (8) y est positive, et maxima quand elle

y est négative, on voit que, si cette expression (8) a le même signe pour toutes les directions, la fonction F sera un minimum absolu ou un maximum absolu en (x, y, z) et ne retrouvera pas, dans tout le voisinage, sa valeur c relative à ce point. Celui-ci constituera donc un *point isolé*.

Si, au contraire, l'expression (8) est positive pour certaines des droites qui s'y croisent, négative pour d'autres, la fonction F sera plus grande qu'en (x, y, z) aux endroits voisins appartenant aux premières de ces droites, mais moindre qu'en (x, y, z) à ceux qui se trouveront sur les secondes; et elle passera ainsi par sa valeur relative à (x, y, z) en des points situés, par rapport à (x, y, z), dans des directions infiniment voisines de celles pour lesquelles s'annulera l'expression (8). Or, celle-ci, égalée à zéro, donne une équation à deux inconnues distinctes seulement, savoir, les rapports de H et K à L. L'un de ces rapports y sera donc arbitraire (au moins entre certaines limites), et il résultera de l'équation une valeur de l'autre en fonction continûment variable du premier.

C'est dire que les droites, émanées de (x, y, z), suivant lesquelles l'expression (8) s'annulera, se juxtaposeront de manière à former un espace sans épaisseur, savoir, une surface conique, ou, comme on dit, un *cône*, ayant à la fois pour *centre* et pour *sommet* le point (x, y, z). Les points de la surface $F(x, y, z) = c$ voisins de (x, y, z) seront donc, vus de ce sommet, dans des directions infiniment peu différentes de celles des *génératrices* du cône; et, le long de toute droite très courte perçant ce dernier près du sommet (x, y, z) suivant une direction qui ne soit celle d'aucune génératrice, droite dont j'appellerai x_1, y_1, z_1 les coordonnées courantes, la fonction $F(x_1, y_1, z_1)$ passera un nombre impair de fois par sa valeur c relative au point (x, y, z), puisqu'elle devra y devenir, de plus petite, définitivement plus grande, ou *vice versâ*. Or elle ne pourra y acquérir plus d'une fois la valeur c; car, si elle y passait trois fois par cette valeur, sa dérivée seconde le long du chemin suivi devrait s'y annuler d'après le théorème de Rolle, ce qu'elle ne fait pas, ayant sensiblement le long de ce chemin, en vertu de la continuité, sa valeur (8), différente de zéro, relative à un chemin parallèle mené par (x, y, z).

Donc la surface aura, de chaque côté du sommet (x, y, z), une nappe unique continue, aboutissant à ce sommet tangentiellement au cône indiqué. C'est dire qu'un pareil point (x, y, z) établit la jonction de deux nappes, qui s'y opposent mutuellement leurs tangentes émanées de ce point. Le lieu de celles-ci, obtenu par l'annulation de l'expression (8), dans laquelle, à H, K, L, on pourra substituer Hl,

Kl, Ll et, finalement, x_1-x, y_1-y, z_1-z, est le *cône du second degré*

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2F}{dx^2}(x_1-x)^2+\frac{d^2F}{dy^2}(y_1-y)^2+\frac{d^2F}{dz^2}(z_1-z)^2 \\ &\quad +2\frac{d^2F}{dy\,dz}(y_1-y)(z_1-z)+2\frac{d^2F}{dz\,dx}(z_1-z)(x_1-x) \\ &\qquad\qquad +2\frac{d^2F}{dx\,dy}(x_1-x)(y_1-y)=0. \end{aligned} \right.$$

Aussi un tel point (x, y, z) est-il appelé *point conique*. On voit que la surface, dans une étendue infiniment petite tout autour, n'a plus la forme d'un plan, mais bien celle du cône (9), dont la base, sur le plan des xy par exemple, est une courbe du second degré.

Le cas particulier le plus remarquable se présente quand le cône est circulaire droit, ou que la surface affecte sensiblement, près du point (x, y, z), une forme *de révolution*, c'est-à-dire engendrée par une ligne plane (ici une simple droite) tournant autour d'un axe compris dans son plan. Le point (x, y, z) est appelé alors *ombilic conique;* car le nom d'*ombilic* s'emploie, comme on verra plus loin, à désigner en général les points tout autour desquels une surface présente dans le voisinage une forme de révolution, à des écarts près infiniment plus petits que ceux par lesquels elle s'y distingue d'un plan.

177*. — Problème général des ombres; développable circonscrite à deux surfaces.

Dans le premier problème abordé au n° 175 (p. 254), où il s'agissait, si l'on veut, de circonscrire à la surface $F(x, y, z)=c$ d'un corps opaque un cône de rayons lumineux émanés d'un point $A(x_1, y_1, z_1)$, admettons que ce point A soit remplacé par la surface, ayant une équation donnée $F_1(x_1, y_1, z_1)=c_1$, d'un corps lumineux et transparent quelconque. Si nous supposons un observateur placé derrière le corps opaque et assez près de celui-ci, le cône ayant pour sommet son œil et circonscrit au corps opaque, ou cône *de ses rayons visuels*, pourra être très ouvert et comprendra, au delà du corps opaque, le corps lumineux tout entier. Alors l'observateur, dont l'œil ne perçoit aucun rayon lumineux, se trouve dans l'*ombre portée* par le corps opaque.

Mais, s'il se déplace latéralement d'une quantité suffisante, le cône de ses rayons visuels circonscrit au corps opaque finit par raser le corps lumineux, qui lui devient tangent *intérieurement;* et, d'ailleurs, le plan tangent ainsi commun au corps lumineux et au cône est évidemment, dans ce dernier, le plan de deux génératrices consécu-

tives, tangent au cône tout le long de celle de ces deux génératrices qui aboutit au corps lumineux et tangent aussi au corps opaque au point où la même génératrice l'atteint. Il y a donc alors, suivant le rayon visuel constituant cette génératrice, un plan tangent commun aux deux surfaces $F(x, y, z) = c$, $F_1(x_1, y_1, z_1) = c_1$; et ce plan leur est tangent *extérieurement*, c'est-à-dire qu'il ne passe pas entre les deux surfaces, mais les laisse toutes les deux sur un seul de ses côtés. D'ailleurs, au même moment, l'observateur est sur le point d'apercevoir une petite partie du corps lumineux, savoir la partie qui sortirait du cône de rayons visuels circonscrit au corps opaque, si l'observateur continuait à s'éloigner latéralement. Donc *la limite de l'ombre, en arrière du corps opaque, est le lieu des droites qui joignent les deux points de contact* (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) *de plans tangents extérieurs communs aux deux surfaces données* $F(x, y, z) = c$ *et* $F_1(x_1, y_1, z_1) = c_1$.

Concevons actuellement que l'observateur dépasse cette surface limite de l'ombre. Il ne verra encore qu'une *partie* du corps lumineux et se trouvera dans ce qu'on appelle la *pénombre*, c'est-à-dire dans un espace imparfaitement éclairé. Et il en sera ainsi jusqu'à ce que son cône de rayons visuels circonscrit au corps opaque ne coupe plus le corps lumineux; ce qui arrivera lorsque le corps lumineux deviendra tangent extérieurement au cône et quand, par suite, le long du rayon visuel mené au point de contact, le plan tangent au cône ira toucher les deux surfaces $F(x, y, z) = c$, $F_1(x_1, y_1, z_1) = c_1$, en passant entre elles. Au delà l'observateur sera en pleine lumière, les deux cônes de rayons visuels circonscrits aux deux corps opaque et lumineux n'empiétant plus l'un sur l'autre. Par conséquent, *la limite de la pénombre, en arrière du corps opaque, est le lieu des droites joignant les deux points de contact* (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) *de plans tangents communs aux deux surfaces données et qui sont intérieurs, c'est-à-dire qui passent entre ces deux surfaces.*

Le *problème des ombres*, ou qui a pour but de déterminer les deux surfaces séparant l'ombre de la pénombre et la pénombre de la lumière, revient donc à chercher la surface totale, lieu des droites qui joignent les points de contact des plans tangents communs aux deux surfaces données : comme ces plans peuvent, en général, être tangents extérieurement ou intérieurement, elle comprend d'ordinaire deux nappes, dont les parties situées à l'arrière du corps opaque sont respectivement les deux surfaces partielles cherchées.

Voyons comment on pourrait en former l'équation. Appelons X, Y, Z ses coordonnées courantes, c'est-à-dire celles d'un point quelconque

de la droite de jonction des deux points de contact respectifs (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) d'un plan tangent commun aux deux surfaces $F(x, y, z) = c$, $F_1(x_1, y_1, z_1) = c_1$. Et, d'abord, on exprime que les deux plans tangents en (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) ont même direction, en écrivant la double proportion

$$(11) \qquad \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF_1}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF_1}{dy_1}} = \frac{\frac{dF}{dz}}{\frac{dF_1}{dz_1}};$$

et leur identité exige, en outre, que le plan tangent en (x, y, z) aille passer par (x_1, y_1, z_1), ou qu'on ait

$$(12) \qquad \frac{dF}{dx}(x_1 - x) + \frac{dF}{dy}(y_1 - y) + \frac{dF}{dz}(z_1 - z) = 0.$$

En joignant à ces trois relations les équations $F(x, y, z) = c$, $F_1(x_1, y_1, z_1) = c_1$ des deux surfaces respectives, il vient en tout cinq équations entre les six variables x, y, z, x_1, y_1, z_1; de sorte que si x, par exemple, est choisi comme variable indépendante, y, z, x_1, y_1 et z_1 en deviennent des fonctions, et, par conséquent, les deux courbes (généralement doubles) de contact sur les deux surfaces sont bien déterminées. Enfin la génératrice de la surface cherchée a pour équations

$$(13) \qquad \frac{X - x}{x_1 - x} = \frac{Y - y}{y_1 - y} = \frac{Z - z}{z_1 - z};$$

et l'élimination de x entre elles, après que y, z, x_1, y_1, z_1 ont été éliminés au moyen des précédentes, ou l'élimination simultanée de x, y, z, x_1, y_1, z_1 entre les sept équations posées, donne la relation cherchée entre X, Y, Z, équation de la surface à deux nappes que l'on considère.

Observons que les deux plans tangents menés à une surface en deux points voisins (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ se coupent à une distance infiniment petite de ces deux points. En effet, leur angle mutuel est généralement du premier ordre de petitesse, c'est-à-dire du même ordre que l'est, pour les longueurs, la distance de ces deux points de contact. Or l'écart perpendiculaire du second point de contact $(x + dx, y + dy, z + dz)$ d'avec le plan tangent mené au premier (x, y, z), égale évidemment le produit de cet angle (ou de sa tangente) par la distance à laquelle passe de là l'intersection des deux plans, et cet écart se trouve d'ailleurs d'un ordre de petitesse supérieur au premier, à cause du contact du plan tangent mené en (x, y, z) avec la surface. Donc la distance à laquelle vont se couper les deux plans,

quotient d'un écart d'un ordre de petitesse supérieur au premier par un angle infiniment petit du premier ordre, est bien infiniment petite, et l'on peut dire que l'intersection des deux plans tangents passe, à la limite, par leur point de contact.

D'après cela, deux plans tangents consécutifs, menés à nos deux surfaces $F=c$ et $F_1=c_1$, se couperont, à la limite, suivant une droite passant par les deux points de contact (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) du premier d'entre eux, et qui ne sera autre qu'une des génératrices de la surface à deux nappes considérée. Celle-ci peut donc être définie le lieu des intersections successives des plans tangents communs aux deux surfaces proposées, ou, en un mot, l'*enveloppe* de ces plans. Et comme chaque plan tangent contient deux intersections consécutives, savoir celle où il coupe le plan tangent précédent et celle où il est coupé par le suivant, comme, de plus, la partie très aiguë d'un tel plan comprise entre les deux génératrices correspondantes forme, avec les parties analogues des plans tangents voisins, des angles dièdres infiniment ouverts à la limite, et se raccorde ainsi avec elles, pour donner finalement une nappe continue se confondant partout avec la proposée non seulement en situation mais aussi en direction, c'est-à-dire sous tous les rapports qu'implique notre intuition de l'étendue superficielle, il est clair que la surface enveloppe dont il s'agit sera assimilable à l'ensemble des longues bandes planes, infiniment étroites, comprises de la sorte entre ses génératrices consécutives.

Or on pourra, sans déformer individuellement de telles bandes, les étaler sur un plan les unes à côté des autres, en les faisant tourner autour des génératrices qui les limitent; et l'on aura ainsi *déplié* chacune des nappes. Pour exprimer cette propriété, on dit que la surface demandée est une *surface développable*. Ce sera la *développable circonscrite* aux deux surfaces données $F(x, y, z)=c$ et $F_1(x_1, y_1, z_1)=c_1$. Le cône circonscrit à la première $F(x, y, z)=c$, à partir d'un sommet donné (x_1, y_1, z_1), n'en était que le cas le plus simple, celui où la seconde surface se réduit à un point.

178*. — Détermination d'une surface par l'ensemble de ses plans tangents; onde de Fresnel; idée des surfaces enveloppes en général.

Les questions précédentes ne nous conduisaient à considérer que les plans tangents menés à une surface le long d'une certaine courbe de contact, plans dont l'équation ne contenait qu'un seul paramètre indépendant, savoir, l'abscisse x des points de contact; et le lieu de

leurs intersections successives *prises dans toute leur longueur*, ou ce qu'on appelait l'*enveloppe* de ces plans tangents, était la développable circonscrite à la surface le long de la ligne de contact donnée ou obtenue. Or on conçoit que d'autres problèmes amènent à considérer les intersections d'un premier plan tangent par tous ceux qui en sont voisins, et dont l'équation contient les deux paramètres arbitraires distincts x et y définissant leurs points respectifs de contact, pour ne garder que ce qui est commun à toutes, savoir, le *point* même de contact du premier plan, point par lequel nous venons de voir (p. 223*) que passent constamment ces intersections. Et alors l'*enveloppe*, ou lieu de tous les points de concours analogues, n'est évidemment autre que la surface elle-même.

C'est ce qui arrive lorsque, étant donnée une famille de plans,

$$lx + my + nz = c, \tag{14}$$

où c désigne une constante et l, m, n trois paramètres fonctions de la direction du plan, c'est-à-dire de leurs rapports mutuels qui la définissent, on demande de trouver une surface ayant tous ces plans pour plans tangents. Et, d'abord, une certaine relation connue, $\varphi(l, m, n) = 0$, existera entre les trois paramètres l, m et n, puisque chacun d'eux sera déterminé dès qu'on donnera les rapports des deux autres à celui-là. Donc, on pourra regarder l et m, par exemple, comme indépendants, et n comme la fonction de l, m définie par la relation $\varphi(l, m, n) = 0$.

Cela posé, le *point de contact* cherché (x, y, z) correspondant à l'un, (14), des plans, devra être tel, que tout point de la surface infiniment voisin $(x + dx, y + dy, z + dz)$ y soit également contenu, à des écarts près d'un ordre de petitesse supérieur à celui de la corde ds dont dx, dy, dz désignent les projections obliques sur les axes. Si donc x, y, z, dans (14), sont les coordonnées du point de contact, on aura non seulement cette équation (14), mais encore celle-ci,

$$l(x + dx) + m(y + dy) + n(z + dz) = c$$

obtenue en y faisant croître x, y, z de dx, dy, dz; et il viendra, par soustraction,

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0, \tag{15}$$

sauf erreur, dans le second membre, négligeable en comparaison des termes du premier. Mais les coordonnées x, y, z des points de contact, fonctions, comme n, de l et m, sont en outre telles, que l'équation (14) se trouve également vérifiée pour le plan tangent conduit en

$(x + dx, y + dy, z + dz)$, où l, m, n, x, y, z ont crû de différentielles dl, dm, dn, dx, dy, dz, arbitraires seulement pour l et m. Donc l'accroissement total subi alors par le premier membre de (14), savoir, $l\,dx + x\,dl + m\,dy + y\,dm + n\,dz + z\,dn$ (sauf encore erreur infiniment petite en comparaison des divers termes), est nul; et il vient, en supprimant les trois termes dont la somme se trouve négligeable d'après (15),

$$(16) \qquad x\,dl + y\,dm + z\,dn = 0.$$

C'est bien l'équation qu'on aurait en cherchant les points (x, y, z) communs au plan tangent (14) et à ses voisins, qui en diffèrent par les accroissements dl, dm, dn de l, m, n; car l'équation (14) retranchée de celle de ces nouveaux plans donnerait justement la différentielle (16) de (14) en l, m, n.

Or la valeur non arbitraire de dn résulte de $\varphi(l, m, n) = 0$ différentiée, c'est-à-dire de

$$(17) \qquad \frac{d\varphi}{dl}\,dl + \frac{d\varphi}{dm}\,dm + \frac{d\varphi}{dn}\,dn = 0,$$

et l'on voit que la relation (16) ne peut, après substitution à dn de sa valeur fournie par celle-ci (17), être vérifiée quel que soit le rapport arbitraire de dl à dm, que s'il y a, dans (16), proportionnalité des coefficients x, y, z à ceux, $\frac{d\varphi}{d(l, m, n)}$, de (17). On formera un quatrième rapport égal aux trois ainsi obtenus, en ajoutant ceux-ci terme à terme après les avoir multipliés respectivement *haut et bas* par l, m, n; et, si l'on substitue alors au numérateur $lx + my + nz$ de ce quatrième rapport sa valeur c tirée de (14), la comparaison de chacun des trois premiers rapports au quatrième donnera pour x, y, z les valeurs cherchées :

$$(18) \qquad (x, y, z) = \frac{c}{l\frac{d\varphi}{dl} + m\frac{d\varphi}{dm} + n\frac{d\varphi}{dn}}\,\frac{d\varphi}{d(l, m, n)}.$$

On pourra donc construire la surface par points, en marquant, pour chaque système de valeurs de l et m, ou sur chacun des plans (14) de la famille, le point (x, y, z) où il touche leur enveloppe commune. Et l'équation de celle-ci s'obtiendra par l'élimination de l et m entre les trois équations (18), si n en a déjà été éliminé, ou, sinon, par l'élimination de l, m, n entre les trois équations (18) et la relation $\varphi(l, m, n) = 0$.

D'ailleurs, quelle que soit la famille donnée (14) de plans, la surface

trouvée leur sera bien tangente aux points correspondants (x, y, z) : car les valeurs (18) vérifient identiquement l'équation (14) et aussi, vu (17), la relation (16); ce qui réduit la différentielle, évidemment nulle, du trinôme $lx + my + nz = c$, où x, y, z auraient les expressions (18), à $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$, et signifie alors que les coordonnées $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, d'un point quelconque de la surface obtenue voisin de (x, y, z), satisfont à (14) sans qu'on ait besoin de faire varier l, m, n, ou que le plan (14) contient toutes les cordes infiniment petites menées en (x, y, z) à la surface, et en est bien le plan tangent.

Cherchons, comme premier exemple, l'enveloppe des plans situés à une distance égale c de l'origine. Alors l, m, n sont, dans (14), les trois cosinus directeurs de leur normale, et la relation $\varphi(l, m, n) = 0$ se réduit à $l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0$. Les équations (18) deviennent simplement $x = cl$, $y = cm$, $z = cn$; d'où résultent des valeurs de l, m, n qui, portées dans la condition reliant ces trois cosinus, donne, pour l'enveloppe, $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0$, c'est-à-dire une sphère de rayon c décrite autour de l'origine, comme on pouvait le prévoir.

Si, la distance des plans à l'origine n'étant plus c, la relation entre l, m et n prenait la forme un peu moins simple $Al^2 + Bm^2 + Cn^2 = 1$ avec trois coefficients connus A, B, C, on trouverait $x = cAl$, $y = cBm$, $z = cCn$, et l'enveloppe serait la surface du second degré

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = c^2.$$

Mais le plus bel exemple de cette théorie se trouve en Physique, dans le problème de la double réfraction, à propos d'une surface à deux nappes d'ondes lumineuses dite *surface de Fresnel*, enveloppe d'une double famille d'ondes planes dont l'équation est

$$lx + my + nz = 1,$$

c'est-à-dire (14) prise avec $c = 1$, la relation entre l, m et n (à trois constantes A, B, C) étant

$$(19) \qquad \frac{l^2}{1 - AS} + \frac{m^2}{1 - BS} + \frac{n^2}{1 - CS} = 0,$$

où S désigne, pour abréger, la somme $l^2 + m^2 + n^2$. Appelons de même K l'expression $\left(\frac{l}{1 - AS}\right)^2 + \left(\frac{m}{1 - BS}\right)^2 + \left(\frac{n}{1 - CS}\right)^2$, qui, diminuée du premier membre nul de (19), égale le produit par S de la somme $\frac{Al^2}{(1 - AS)^2} + \frac{Bm^2}{(1 - BS)^2} + \frac{Cn^2}{(1 - CS)^2}$; et observons que les dé-

rivées du premier membre $\varphi(l, m, n)$ de (19) en l, m, n comprendront ici, outre le terme évident $\frac{2(l, m, n)}{1-(A, B, C)S}$, le produit de la dérivée de ce premier membre en S, qui vaut la dernière somme mentionnée, ou $\frac{K}{S}$, par la dérivée même de S en l, m, n, c'est-à-dire par $2(l, m, n)$. La relation (19) réduira immédiatement à $2K$ le dénominateur commun $l\frac{d\varphi}{dl}+\ldots$ des valeurs (18) de x, y, z, qui seront alors

$$(20)\quad x=\frac{l}{S}+\frac{1}{K}\frac{l}{1-AS},\quad y=\frac{m}{S}+\frac{1}{K}\frac{m}{1-BS},\quad z=\frac{n}{S}+\frac{1}{K}\frac{n}{1-CS}.$$

En faisant la somme des carrés de ces trois expressions et appelant r^2, pour abréger, cette somme $x^2+y^2+z^2$, carré de la distance du point (x, y, z) à l'origine, on en déduit de suite, vu (19),

$$(21)\qquad r^2=\frac{1}{S}+\frac{1}{K},\qquad r^2-A=\frac{1-AS}{l}\left(\frac{l}{S}+\frac{1}{K}\frac{l}{1-AS}\right);$$

et le rapport, d'après (20) et (21), de x^2 à r^2-A, est

$$\frac{1}{S}\frac{l^2}{1-AS}+\frac{1}{K}\left(\frac{l}{1-AS}\right)^2.$$

Ajoutons-y les rapports analogues de y^2 à r^2-B et de z^2 à r^2-C : il viendra enfin, identiquement, vu encore (19),

$$(22)\qquad \frac{x^2}{r^2-A}+\frac{y^2}{r^2-B}+\frac{z^2}{r^2-C}=1.$$

Telle est l'équation de l'onde de Fresnel.

De même que nous avons considéré des intersections successives de plans dépendant de un ou deux paramètres arbitraires, de même, étant donnée une famille de surfaces courbes définie par une équation à un ou deux paramètres, on peut déterminer soit la ligne, soit seulement le point, communs à celles qui sont infiniment voisines, et obtenir, comme lieu de ces lignes ou de ces points, une surface, dite l'*enveloppe* de la famille. C'est ce qu'a fait Monge; et nous verrons, vers la fin du Calcul intégral, à propos des équations aux dérivées partielles qui régissent le plan tangent à de pareilles familles de surfaces, la propriété la plus importante de ces enveloppes, consistant en leur tangence aux surfaces de la famille, comme il arrive dans les enveloppes de plans étudiées ci-dessus. Je me contenterai de remarquer à présent que ce nom d'*enveloppes* ne leur convient pas d'une

manière aussi générale qu'au lieu des intersections successives d'une famille de courbes planes : car on a reconnu (p. 209*) que deux surfaces en contact peuvent aussi bien, au point commun, présenter une double intersection que ne pas se couper du tout; d'où il suit que, très souvent, la surface, dite *enveloppe,* tangente à toutes celles d'une même famille, les croise (même quand ce sont de simples plans) et, par conséquent, ne sert pas de limite à l'espace qu'elles occupent.

180*. — Lignes de niveau et lignes de pente; leur forme dans le voisinage d'un fond, d'un sommet, ou d'un col ordinaires.

Dans l'étude qui vient d'être rappelée (¹), relative à la fonction de point $z = f(x, y)$ exprimant l'ordonnée verticale z d'une surface, mais que nous concevions en même temps réalisée d'une manière matérielle sur le plan horizontal des x, y, nous avons encore appris à connaître les *lignes de niveau* $f(x, y) =$ const. de la surface, égales et parallèles à leur projection horizontale, et ses *lignes de plus grande pente,* qui coupent celles de niveau à angle droit tant dans l'espace qu'en projection sur le plan des xy, et qui, en chaque point, ont pour pente la pente même tangγ de la surface; d'où dérive le nom de *lignes de pente* de la surface, qu'on leur donne aussi.

Quand on se borne aux projections horizontales de ces diverses courbes, y y devient fonction de x, et le coefficient angulaire y', pour celle de niveau passant par un point quelconque (x, y) du plan des xy, se déduit de l'équation $f(x, y) =$ const. différentiée, c'est-à-dire de $p + qy' = 0$: il vaut, en conséquence, $-\frac{p}{q}$. Par suite, le coefficient angulaire analogue, au même point (x, y), pour la ligne de pente perpendiculaire, sera, comme on sait (²), l'inverse changé de signe, c'est-à-dire $\frac{q}{p}$. Les lignes de pente auront donc pour équation différentielle, entre x, y, dx et dy, ou en projection sur le plan des xy,

$$(26) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad q\,dx - p\,dy = 0.$$

On conçoit que cette équation, faisant connaître de proche en proche la direction prise par les lignes de plus grande pente, les détermine

(¹) *Voir* le numéro précédent, 179, au Fascicule I, p. 259.
(²) Ou comme on le voit par la note de la p. 199, Fascicule I.

et permette de les construire. Nous allons le voir d'abord sur un exemple qui comprendra deux cas distincts.

Ce sera celui d'une surface quelconque $z = f(x, y)$, considérée seulement dans le voisinage d'un point, pris pour origine, où le plan tangent soit horizontal. La pente $\sqrt{p^2 + q^2}$ étant ainsi nulle à l'origine, on y aura $p = 0$, $q = 0$; mais, d'ordinaire, les trois dérivées partielles secondes de z ne s'y annuleront pas, et, en les y désignant par r, s, t, la formule de Taylor (p. 136*), où h et k ne seront autres que les petites coordonnées x et y, donnera pour équation de la surface aux environs de l'origine, à des erreurs relatives près négligeables,

$$z = \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

Or on sait, par la théorie des courbes du second degré, que le trinôme entre parenthèses peut, grâce à un changement convenable de l'orientation des axes rectangulaires des x et des y, et tout en conservant sa valeur en chaque point du plan des xy, être débarrassé du rectangle des variables. Supposons donc que ce changement d'orientation ait été fait, ce qui réduit le trinôme à ses deux termes extrêmes; et, pour fixer les idées, appelons x la coordonnée dont le carré aura son coefficient positif quand les deux termes seront de signes contraires, ou qui aura le coefficient le plus faible en valeur absolue s'ils sont de même signe; et soit $\pm k$ le rapport de l'autre coefficient à celui-là, k en étant la valeur absolue, supérieure par hypothèse à l'unité quand elle est prise avec le signe +. L'expression ci-dessus de z deviendra ainsi le produit d'un certain coefficient par $x^2 \pm ky^2$; et les lignes de niveau auront pour équation

$$x^2 \pm ky^2 = \text{const.} \tag{27}$$

Ce sont, en projection sur le plan tangent horizontal, soit des ellipses homothétiques, soit des hyperboles ou homothétiques ou conjuguées, ayant pour centre le point considéré de la surface. La constante du second membre, proportionnelle à $+z$ ou à $-z$ quand les deux termes du premier membre ont même signe, et à $+z$ quand ils ont signe contraire, est, dans le premier cas, essentiellement positive comme le premier membre; et, par suite, les valeurs de l'altitude z sont, alors, toutes de même signe près du point origine considéré. Ce point sera donc, 1° un *fond*, si les *altitudes* z sont positives (supposées comptées de bas en haut), 2° un *sommet*, si elles sont négatives. Au contraire, dans le cas des hyperboles où le premier membre de (27), différence de deux carrés, est proportionnel à z, cette altitude z reçoit

autour du point considéré des valeurs positives près du plan des zx, des valeurs négatives près du plan des zy; et le point en question pris comme origine est un *col*, la surface s'élevant quand on s'en éloigne du côté des x tant positifs que négatifs, et s'abaissant quand on s'en éloigne au contraire du côté des y, soit positifs, soit négatifs.

La différentiation de (27) donne, pour le coefficient angulaire y' des lignes de niveau, la valeur $\mp\frac{x}{ky}$, et, par suite, pour celui des lignes de pente, l'inverse changé de signe. L'équation différentielle (26) devient donc

$$(28)\qquad y' = \pm\frac{ky}{x} \quad \text{ou} \quad ky\,dx \mp x\,dy = 0.$$

A cause de la symétrie de la surface par rapport aux plans des zx et des zy, les mêmes circonstances se présentent dans les quatre angles dièdres formés par ces plans coordonnés; et nous pouvons nous borner à celui où les x et les y sont positifs. Alors la seconde équation (28), multipliée par $-x^{-k-1}y^{\pm1-1}$, devient identiquement $d(x^{-k}y^{\pm1}) = 0$ et signifie que, le long de la ligne suivie, l'expression $x^{-k}y^{\pm1}$ a sa dérivée nulle, ou reste la même. Donc, en appelant c sa valeur, qui sera un paramètre caractéristique des lignes de pente, l'équation finie de ces lignes pourra s'écrire $x^{-k}y^{\pm1} = c$, ou bien

$$(29)\qquad y = \text{soit } cx^k, \text{ soit } \frac{1}{cx^k},$$

la première forme correspondant au cas d'un *sommet* ou d'un *fond* et, la seconde, au cas d'un *col*.

On voit que, dans le premier cas, les lignes de pente sont, en projection horizontale, des sortes de paraboles passant par l'origine ($x=0, y=0$) et dont le coefficient angulaire y', proportionnel à cx^{k-1}, s'y annule à moins que c ne soit infini (vu que k est alors supérieur à l'unité). Toutes ces paraboles aboutissent donc au fond ou partent du sommet, et, pour les valeurs finies de c, y aboutissent ou en partent (vues sur le plan des xy) tangentiellement à l'axe des x, c'est-à-dire, dans l'espace, tangentiellement à la section de la surface par le plan des zx. Quant à celles pour lesquelles c est infini, et qui, par suite, au sommet ou au fond, peuvent avoir leurs tangentes orientées d'une manière quelconque dans le plan horizontal, la première équation (29) montre qu'on y a $x=0$ (dès que y n'est plus nul), ou que ces lignes se confondent avec la section de la surface par le plan des zy.

Si donc on suppose les lignes de pente suivies en descendant, celles

qu'on observe dans le voisinage d'un sommet et qui y couvrent la surface sont parties du sommet tangentiellement à la section de la surface par le plan des zx; et celles qui en sont parties dans toute autre direction, loin de s'étaler sur la surface, tournent infiniment vite pour venir se confondre avec la section de la surface par le plan des zy. Nous verrons bientôt que ces propriétés font, de la section par le plan des zx considérée près du sommet, ce qu'on appelle une ligne de *faîte* et, de la section par le plan des zy, considérée de même dans le voisinage du sommet, ce qu'on appelle une ligne de *thalweg*. Près d'un fond ce sera tout le contraire, ce qui était *thalweg* devenant *faîte* et *vice versa;* car les lignes de pente y seront, en projection horizontale, les mêmes que dans le cas précédent, mais suivies, à partir de l'origine, en remontant, et non plus en descendant.

C'est de part et d'autre de ces deux sections de la surface par les plans des zx et des zy, lignes de pente seules contenues dans un plan vertical (lorsque k ne se réduit pas à l'unité) et données par les deux hypothèses $c = 0$, $c = \infty$, que se disposent symétriquement les autres lignes de pente. Une seule de celles-ci passe d'ailleurs par tout point donné (x, y) autre que l'origine; car la valeur de c, rapport de y à x^k, est déterminée sans ambiguïté dès que x et y ne sont pas nuls.

Dans le cas d'un col, où le produit yx^k est constant le long d'une ligne de pente devenue ainsi (en projection horizontale) une sorte d'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, on voit que y et x ne peuvent s'annuler ensemble, mais chacun seulement quand l'autre est infini, à moins toutefois que ce produit yx^k ne soit nul, entraînant alors l'annulation ou de y ou de x tout le long de la ligne de plus grande pente correspondante. Donc les deux sections verticales de la surface suivant les plans des zx et des zy sont les seules lignes de pente qui passent par le col; et les autres lignes de pente, suivies en descendant, se détachent toutes asymptotiquement de la première de ces sections pour aboutir de même à la seconde. Près du col, la première est ainsi, comme il arrivait tout à l'heure près d'un sommet, une ligne de *faîte*, et, la seconde, une ligne de *thalweg*.

181*. — Autre exemple, où les lignes de niveau et de pente sont circulaires en projection horizontale.

Un autre exemple simple et instructif est donné par la surface en laquelle se transforme celle d'un sol horizontal élastique, quand, en un de ses points pris pour origine, on applique une traction horizontale

dirigée vers les x négatifs. L'axe des z étant supposé mené vers le haut, j'ai reconnu (¹) que, si a désigne une certaine ligne, on a alors, sauf aux distances extrêmement petites de l'origine,

$$z = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}. \tag{30}$$

Telle est la surface dont il s'agit d'étudier principalement les lignes de pente. Son caractère distinctif consiste en ce que ses sections, par les plans $z = kx$ menés suivant l'axe des y et de diverses pentes k, sont, en projection horizontale, des cercles concentriques $k(x^2+y^2) = a^2$, ayant leurs rayons inversement proportionnels à la racine carrée de cette pente. Et l'on reconnaît aisément, par le calcul de l'expression $\sqrt{p^2+q^2}$, que la pente de la surface, sur les sections dont il s'agit, vaut elle-même k, c'est-à-dire le quotient de a^2 par x^2+y^2, quoiqu'elle s'y trouve dirigée en sens divers. La section de cette surface par le plan $x = 0$ des yz est l'horizontale $z = 0$; mais, par le plan $y = 0$ des zx, c'est l'hyperbole équilatère $zx = a^2$, asymptote, du côté des x positifs, à la partie supérieure de l'axe vertical des z, et, du côté des x négatifs, à sa partie inférieure; de sorte que la surface présente suivant cet axe des z un *précipice* de hauteur infinie, entre un sommet $z = \infty$ correspondant à une valeur infiniment petite positive ε de x, et un fond $z = -\infty$ correspondant à une valeur infiniment petite négative $-\varepsilon$ de x.

En projection horizontale, les lignes de niveau, le long desquelles on a z = une const. ou, d'après (30),

$$\frac{x^2+y^2}{x} = \text{une constante } 2m, \tag{31}$$

sont, comme on voit, les cercles $(x-m)^2+y^2 = m^2$, tangents à l'axe des y et ayant leurs centres sur l'axe des x. Or, à l'origine, ces cercles se trouvent évidemment coupés à angle droit par ceux qui, tangents à l'axe des x, auraient leurs centres sur l'axe des y, ou dont l'équation serait

$$\frac{x^2+y^2}{y} = \text{une constante } 2c. \tag{32}$$

Comme deux circonférences, toujours symétriques de part et d'autre de la droite de jonction de leurs centres, se croisent sous un même angle en leurs deux points communs, cette seconde famille (32) de cercles

(¹) Dans mon *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, etc., p. 189.

ne pourra manquer de couper *orthogonalement*, sur tout le plan, la première (31). Elle constitue donc les projections horizontales des lignes de pente de la surface; et ces lignes *tombent* du sommet ($x = \varepsilon$, $y = 0$, $z = \infty$), asymptotiquement à la section de la surface par le plan des zx positifs, pour descendre (en tournant) avec la pente calculée plus haut $\frac{a^2}{x^2+y^2}$, décroissante tant qu'elles s'éloignent de l'axe des z, puis croissante quand elles s'en rapprochent, et venir enfin *plonger* vers le fond ($x = -\varepsilon$, $y = 0$, $z = \infty$), asymptotiquement à la section de la surface par le plan des zx négatifs.

Évaluons l'écart dl de deux de ces lignes, correspondant à des valeurs consécutives c, $c + dc$ de la constante. Il se mesurera, à partir d'un point quelconque (x, y, z) de la première, le long de la ligne de niveau qui y passe et qui se projette en vraie grandeur sur le plan des xy; en sorte que les deux projections dx et dy de dl, suivant les x et les y, seront celles que donnent la différentiation de (31) quand le second membre n'y change pas et celle de (32) quand c croît de dc. Il vient ainsi, après multiplications respectives par x^2 et par y^2,

$$(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0, \qquad 2xy\,dx + (y^2-x^2)\,dy = 2y^2\,dc.$$

On en tire

$$dx = \frac{4xy^3\,dc}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy\,dc}{c^2}, \qquad dy = \frac{2y^2(y^2-x^2)\,dc}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y^2-x^2)\,dc}{2c^2};$$

et il vient enfin simplement, pour dl qui n'est autre chose que $\sqrt{dx^2+dy^2}$, la valeur

$$(33) \qquad dl = \frac{(x^2+y^2)\,dc}{2c^2} = \frac{y\,dc}{c}.$$

On l'aurait eue aussi, plus géométriquement et avec un peu moins de calculs, en évaluant d'abord l'écart des deux courbes suivant une parallèle aux x, par la différentiation de $x^2+y^2 = 2cy$ sans faire varier y $\left(\text{d'où } dx = \frac{y}{x}\,dc\right)$, et puis, en vraie grandeur, par une projection de la droite obtenue dx sur le rayon prolongé du cercle (32), ce qui réduit le résultat dans le rapport de 1 au cosinus $\frac{x}{c}$ de l'angle de projection.

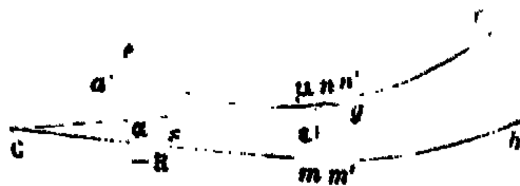
On voit que l'écart (33) de deux lignes contiguës de plus grande pente atteint son maximum (absolu) en même temps que l'ordonnée y de l'une d'elles projetée horizontalement, c'est-à-dire à l'extrémité $y = 2c$ du diamètre dirigé suivant l'axe des y; et il vaut alors $2\,dc$.

Or, ce qu'il importe surtout de considérer, c'est le *rapprochement* mutuel des deux lignes en (x, y), mesuré en quelque sorte par le rapport de ce maximum $2\,dc$ à dl qu'exprime ainsi la fraction $\frac{2c}{y} = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$. Il devient infini pour $y = 0$ ou en tous les points de la section de la surface par le plan des zx. Cette section sera donc la *courbe asymptote* de la famille, d'après la notion des courbes asymptotes donnée au n° **142*** (p. 192*). Et, en effet, cette ligne plane de pente se déduit de l'équation $x^2 + y^2 - 2cy = 0$, ou (32), en posant $c = \infty$, conformément à la règle donnée au même n° **142*** pour obtenir les lignes asymptotes d'une famille. Sa partie située du côté des x positifs, et d'où se détacheront asymptotiquement en tous ses points des lignes de pente ordinaires, sera une ligne de *faîte*, et sa partie située du côté des x négatifs, à laquelle aboutiront asymptotiquement en tous ses points des lignes de pente ordinaires, constituera une ligne de *thalweg*.

182*. — Variations de la déclivité le long des lignes de niveau d'une surface.

Considérons, sur la surface quelconque $z = f(x, y)$, deux lignes de niveau voisines, AB, EF, qui, vues en projection sur le plan horizontal des xy, seront respectivement ab, ef; et appelons δ leur différence constante de niveau dans l'espace ou l'accroissement, que je supposerai positif, de z, entre AB et EF. La pente de la surface en un point

Fig. 30.



quelconque M de la première, dont la projection horizontale est m, sera la pente même de l'élément de ligne de plus grande pente projeté en $m\mu$; et elle égalera le rapport de δ à $m\mu$, c'est-à-dire à la distance normale, en m, des deux lignes ab, ef. Supposons que cet élement de ligne de pente vu en projection horizontale, $m\mu$, ait son rayon de courbure R donné en fonction d'une abscisse courbe $am = s$ comptée le long de ab, le rayon dont il s'agit étant pris positivement quand le centre correspondant C de courbure, intersection des deux tangentes mC, μC à ab et à ef, est en avant du point m ou du côté des arcs s croissants, négativement quand, au contraire, il est en arrière, comme dans le cas de la figure. La distance (horizontale) des deux lignes de

niveau, censée mesurée par arc $m\mu = \varepsilon$, et la pente $\tang\gamma$ de la surface en M, sur la verticale de m, seront aussi, évidemment, certaines fonctions de $am = s$.

Proposons-nous de chercher comment varie, le long de la ligne de niveau AB, la *pente* ou *déclivité de la surface*, $\tang\gamma$, rapport de δ à ε. Il faudra, pour cela, exprimer la dérivée en s de $\tang\gamma$ ou d'une de ses fonctions assez simple. Et, d'abord, les distances ε, telles que $m\mu$, de ef et ab, pourront, sauf erreur relative négligeable, s'évaluer partout suivant des droites mn, $m'n'$, ... normales à ab; car un écart comme la corde μn entre un arc $m\mu$ et sa tangente mn est d'un ordre de petitesse supérieur à celui de l'arc $m\mu$, de sorte que la corde $m\mu$, à laquelle peut se réduire cet arc, est elle-même réductible à mn. De plus, les angles de contingence comme $mC\mu$, dont j'appellerai la valeur absolue α, pourront aussi n'être pas distingués de l'angle des deux tangentes menées, aux lignes de niveau, aux deux extrémités comme m et n des droites correspondantes, vu que, le long de l'arc μn négligeable en comparaison de $m\mu$, la tangente tourne infiniment moins que ne le fait la normale de m à μ. Or il suit de là que, si l'on donne à $am = s$ un accroissement $mm' = ds$ infiniment petit en comparaison de mn, et que, par le point n, on mène une courbe ng parallèle à mm', c'est-à-dire coupant à angle droit les normales mn, $m'n'$, l'accroissement positif ou négatif de ε, $m'n' - mn = d\varepsilon$, de signe évidemment contraire à R, sera exprimé en valeur absolue par le petit côté gn' d'un triangle rectangle mixtiligne ayant son angle gnn' réductible à α; et, les côtés ng, nn', infiniment petits d'ordres supérieurs, étant eux-mêmes réductibles à des lignes droites, on aura $gn' = ng \tang\alpha$ ou sensiblement, en remplaçant ng par $mm' = ds$ et $\tang\alpha$ par α, $\pm d\varepsilon = \alpha\, ds$. Comme d'ailleurs l'angle de contingence α de $m\mu$ est le quotient de ε par la valeur absolue $\mp$ R du rayon mC, il viendra $d\varepsilon = -\frac{\varepsilon ds}{R}$, ou encore $\frac{d}{ds}\log\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{R}$, ainsi qu'on le reconnaît en différentiant le logarithme, $-\log\varepsilon$, de l'inverse de ε. Et, pour avoir une relation définissant la dérivée cherchée en s de la pente $\tang\gamma$ ou d'une de ses fonctions, il suffira de remplacer $\frac{1}{\varepsilon}$ par sa valeur $\frac{1}{\delta}\tang\gamma$, ou $\log\frac{1}{\varepsilon}$ par la somme $\log\frac{1}{\delta} + \log\tang\gamma$, dont le premier terme, étant constant, a sa dérivée nulle; ce qui donnera

$$\frac{d\log\tang\gamma}{ds} = \frac{1}{R}. \qquad (34)$$

On voit que la pente ou déclivité $\tang\gamma$ de la surface augmente le

long de l'arc AB quand R est positif, tandis qu'elle diminue quand R est négatif. Donc, *lorsqu'un observateur parcourt une ligne de niveau, la pente de la surface, aux endroits où il se trouve successivement, est de plus en plus forte quand les lignes de pente qu'il croise ont, en projection horizontale, leur centre de courbure devant lui; mais, au contraire, de plus en plus faible, quand ces centres de courbure sont derrière lui : et elle devient, par suite, maxima ou minima, aux points d'inflexion présentés par ces lignes, alors qu'elles ont en projection horizontale un rayon de courbure infini, c'est-à-dire, dans l'espace, deux éléments consécutifs suivant un même plan vertical qui est en conséquence leur plan osculateur.*

183*. — Lignes des déclivités maxima et minima d'une surface; leurs propriétés.

Par raison de continuité, des points d'inflexion pareils, ou avec plan osculateur vertical, existeront tout près de ceux-là, sur les lignes de pente voisines et à des niveaux infiniment peu différents; de sorte que les lieux de ces points seront certaines lignes, où, comme on voit, la déclivité de la surface se trouvera, soit plus forte, soit moindre, qu'en tous les points voisins situés à même altitude. On peut appeler ces lignes, dans le premier cas, *lignes des déclivités maxima* de la surface, et, dans le second cas, *lignes des déclivités minima*. Il est clair que, si l'on suit une ligne de niveau sur une surface continue, on croise alternativement une ligne de la première espèce et une ligne de la deuxième, savoir, une de la première espèce, quand les lignes de plus grande pente rencontrées cessent d'avoir leurs centres de courbure en avant ou d'être concaves vers la région où l'on va, pour devenir convexes, et une de la deuxième, quand ces lignes redeviennent concaves.

Les lignes des déclivités maxima ou minima jouissent encore d'une autre propriété. La courbure des lignes de plus grande pente, en projection horizontale, y étant nulle, ou deux éléments consécutifs de celles-ci pouvant y être censés contenus dans un même plan vertical, perpendiculaire en conséquence aux deux éléments de lignes de niveau qui les coupent, les deux normales menées à la surface à partir des mêmes points d'intersection, perpendiculaires à ces deux éléments parallèles de niveau, ne sortent pas du plan vertical en question. Ainsi, les deux normales à la surface, en deux points consécutifs d'une ligne de plus grande pente dont l'un appartient à une ligne des dé-

clivités maxima ou minima, peuvent être censées concourir ou se rencontrer dans l'espace : ce qui est le caractère distinctif, sur une surface, de la direction de certaines lignes dites *de courbure*, partout au nombre de deux et s'y croisant à angle droit, comme on le verra dans la XXe Leçon. Donc, *en tout point d'une ligne des déclivités maxima ou minima, les lignes de courbure de la surface sont tangentes, l'une, à la ligne de pente, et, par suite, l'autre, à la ligne de niveau.*

Réciproquement, il suffit que deux normales consécutives à la surface se trouvent contenues dans un même plan vertical, ou qu'une ligne de courbure y soit tangente à la ligne de pente, pour que les deux éléments de niveau émanant des pieds de ces normales (éléments perpendiculaires au plan vertical considéré) soient parallèles et pour que, par suite, la ligne de pente en question, qui les croise à angle droit, ait en projection horizontale deux éléments consécutifs pareillement orientés, ou sa courbure nulle. *Tout point où les lignes de courbure sont tangentes à celles de niveau et de pente appartient donc à une ligne des déclivités maxima ou minima.*

Comme exemple, cherchons ces lignes des déclivités maxima ou minima dans la surface particulière étudiée tout à l'heure (p. 233*). Les lignes de plus grande pente y étant (vues sur le plan des xy) des cercles qui tournent tous leur convexité vers l'axe des x, c'est sur cet axe même que se font les changements de sens de leur courbure. Donc les deux branches, *faîte* et *thalweg*, de l'hyperbole équilatère suivant laquelle la surface est coupée par le plan des zx, y constituent les lignes des déclivités maxima ou minima. Les déclivités y deviennent d'ailleurs minima et non maxima, sauf sur l'axe des z; car les lignes de niveau, suivies en projection horizontale à partir de l'origine, sont des cercles tangents à l'axe des y, et un observateur qui les parcourt en s'éloignant de l'origine a derrière lui, sur cet axe des y, les centres de courbure des cercles de plus grande pente qu'il croise. La pente diminue donc à mesure qu'il s'éloigne, et elle devient minima à l'instant où il franchit l'axe des x. Elle n'augmenterait que s'il se rapprochait de l'origine, où elle deviendrait infinie en même temps que la courbure des lignes de pente changerait de sens. Ainsi, sur la surface dont il s'agit, la ligne des déclivités maxima se réduit, en projection horizontale, à l'origine et, dans l'espace, à l'axe des z.

184*. — Leur équation finie.

L'équation finie des lignes des déclivités maxima ou minima se

forme très simplement, quand on donne l'expression $z = f(x, y)$ de l'ordonnée de la surface et, par suite, en x et y, les valeurs de ses dérivées partielles premières et secondes p, q, r, s, t. Il suffit d'exprimer l'une ou l'autre des deux principales propriétés caractéristiques de cette ligne, savoir : 1° que la pente $\sqrt{p^2+q^2}$ de la surface ou, plus simplement, son carré p^2+q^2, y devient maximum ou minimum lorsqu'on chemine le long d'une ligne de niveau, c'est-à-dire que la somme p^2+q^2 y a, d'après le principe de Fermat, sa dérivée nulle, cette dérivée étant supposée prise en faisant croître x de dx et y de $-\frac{p}{q}dx$; 2° que deux éléments consécutifs d'une ligne de plus grande pente y affectent en projection horizontale la même direction, ou le même coefficient angulaire $y' = \frac{q}{p}$; autrement dit, que la dérivée y'' de l'expression $\frac{q}{p}$ s'y annule le long d'une ligne de pente, alors que, x croissant de dx, y croît de $\frac{q}{p}dx$. On aura donc respectivement, d'après ces deux caractères, pour équation des lignes dont il s'agit,

$$(35)\qquad \left(\frac{d}{dx} - \frac{p}{q}\frac{d}{dy}\right)(p^2+q^2) = 0, \qquad \left(\frac{d}{dx} + \frac{q}{p}\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{p} = 0.$$

La première (35), en différentiant successivement p^2, puis q^2, et multipliant par $\frac{1}{2}q$, donne

$$(36)\qquad p\left(q\frac{dp}{dx} - p\frac{dp}{dy}\right) + q\left(q\frac{dq}{dx} - p\frac{dq}{dy}\right) = 0,$$

ou bien, par l'introduction des dérivées secondes r, s, dérivées respectives de p en x et y, et s, t, dérivées analogues de q, suivie d'une transposition de termes,

$$(37)\qquad pq(r-t) = (p^2-q^2)s.$$

Telle est l'équation cherchée de la ligne des déclivités maxima ou minima. M. de Saint-Venant l'a obtenue de cette manière, en 1852.

Or il est aisé de voir qu'elle revient à la seconde équation (35), expression de l'autre propriété fondamentale (dont j'ai justement reconnu ainsi l'existence en 1871). Il suffit, pour cela, de permuter entre elles, dans (36), les deux dérivées de p en y et de q en x, égales l'une et l'autre à s. Alors les deux parenthèses de (36), chan-

gées de signes, deviennent proportionnelles aux deux dérivées en x et y du rapport $\frac{q}{p}$; et cette équation, divisée par p^2, est identique à la seconde (35).

185*. — Application des théories précédentes à la surface terrestre : thalwegs, faîtes, bassins, etc.

A la surface de la Terre, les gouttes de pluie qui ruissellent sur un sol rendu imperméable par une imbibition suffisante s'écartent peu, en général, des lignes de plus grande pente, qu'elles suivraient en toute rigueur, sous la double action de leur poids et de la résistance de la surface, si, à chaque instant, leur vitesse était maintenue infiniment petite. Aux endroits où ces gouttes se réunissent en grand nombre, il existe un cours d'eau, temporaire ou permanent, qui a trouvé tout fait ou qui s'est creusé à la longue un lit assez bas pour n'avoir plus d'ordinaire que de faibles pentes et, par suite, pour permettre à l'écoulement d'y modérer sa vitesse jusqu'au degré où cesse de se produire l'érosion rapide du fond; condition de stabilité (ou, comme on dit, de *régime*) évidemment la première atteinte, mais incompatible avec toute déclivité supérieure, pour chaque nature de terrain, à une certaine limite inverse de la profondeur du courant. Une infinité de lignes de pente, couvrant toutes ensemble une surface finie appelée *bassin* du cours d'eau, viennent donc, inférieurement, se réunir en un faisceau étroit, ou comme en une ligne de plus grande pente unique, sur le parcours de laquelle la déclivité du sol s'atténue dans un grand rapport, et qui jalonne la *vallée* (fond du bassin) dont il s'agit. Cette ligne, à laquelle aboutissent sans cesse, de droite et de gauche, les autres lignes de pente du bassin, a reçu le nom de *thalweg*, mot qui signifie, en allemand, *chemin de la vallée*.

On voit qu'elle se comportera d'ordinaire, par rapport aux lignes de pente voisines, comme une *courbe asymptote* (p. 191*), vers laquelle convergeront leurs parties inférieures. Et c'est bien le rôle que, dans la surface étudiée au n° 181* (p. 235*), nous avons reconnu à la section faite par le plan des zx négatifs. Toutefois, il pourra exceptionnellement arriver, même dans une surface ne présentant aucune discontinuité de son plan tangent, mais seulement un changement assez rapide de direction de ce plan à la traversée du thalweg, que les lignes de pente viennent se joindre à ce dernier tangentiellement et non pas seulement asymptotiquement.

Le long du thalweg, la déclivité de la surface est, on l'a déjà dit, en général très faible, bien moindre qu'à pareille altitude sur les bords

de la vallée. Il s'y produit donc un minimum de cette déclivité, sinon sur la ligne même, du moins dans le voisinage. En d'autres termes, un thalweg est assez voisin d'une ligne des déclivités minima pour qu'on puisse, pratiquement, ne pas l'en distinguer. Toutefois, comme il affecte d'ordinaire, vu en projection horizontale, une courbure sensible, quoique bien moindre que celle des lignes de pente commençant à se diriger vers lui, ce n'est pas sur son parcours même tt' que la courbure de ces lignes s'annule et que la déclivité est minimum, mais à une faible distance du côté de sa convexité, là où les lignes de pente, telles que ab, après avoir, en s'en approchant jusqu'à un certain point, opposé à sa convexité la leur, de a en k, beaucoup plus forte, vont bientôt, pour s'y juxtaposer en b, adopter sa direction et, par conséquent, sa courbure, de sens inverse à ce qu'était d'abord la leur. Il y a donc sur chacune d'elles un point k, très proche de tt', où cette courbure des lignes de pente change de sens; et le lieu de tous les points analogues est la ligne des déclivités minima indiquée. On voit qu'elle ne se confondra tout à fait, en projection sur le plan horizontal, avec le thalweg tt', qu'aux points où s'annulera la courbure de celui-ci, c'est-à-dire, dans l'espace, à ceux où le thalweg aura son plan osculateur vertical, comme il arrivait tout le long du thalweg de la surface étudiée au n° **181*** (p. 235*).

Fig. 31.



Le contour d'un bassin, c'est-à-dire la courbe qui le sépare des bassins adjacents, s'appelle la ligne de *faîte* du bassin. De part et d'autre de cette courbe, les lignes de pente divergent pour se rendre dans les deux bassins contigus, du moins quand les limites des bassins sont marquées par des convexités très allongées ayant, comme les vallées, beaucoup plus de pente dans les sens transversaux que dans le sens longitudinal. Alors les faîtes deviennent, comme les thalwegs, des faisceaux étroits de lignes de pente, mais des faisceaux divergents et non plus convergents; car il s'en détache, sur chaque point de leur parcours, asymptotiquement ou quelquefois même tangentiellement, deux lignes de plus grande pente, une à droite et l'autre à gauche. Et, de même aussi que pour les thalwegs, une ligne des déclivités minima se trouve tellement près de chaque faîte qu'il est permis, *pratiquement*, de le confondre avec elle. Le raisonnement précédent montre toutefois que cette ligne ne coïncide avec le faîte qu'aux points où celui-ci a sa courbure nulle en projection horizontale; et qu'elle s'en tient, dans les autres cas, à une faible distance, du côté de la convexité, c'est-à-dire opposé au centre de cette courbure. La surface étudiée au n° **181*** avait

pour ligne de faîte sa section par le plan des zx positifs : aussi cette section s'y confondait-elle avec une ligne des déclivités minima.

Quand plusieurs vallées allongées sont les unes à côté des autres, le sol se trouve divisé, par des faîtes et des thalwegs consécutifs, en bandes appelées *versants*. Un versant est donc, du moins dans le cas le plus simple, le lieu géométrique des lignes de plus grande pente qui se détachent d'un même faîte pour aboutir à un même thalweg et qui sont, sur toute leur longueur, voisines, chacune, de la suivante. C'est ce qui arrive dans la surface, formant un bassin unique à lignes tant de niveau que de pente circulaires (en projection horizontale), considérée au n° **181***, où les versants sont seulement au nombre de deux, séparés par le plan des zx ; aussi le faîte et le thalweg, contenus dans ce plan vertical, sont-ils en quelque sorte opposés l'un à l'autre, au lieu d'être, comme le plus ordinairement à la surface du globe, soit juxtaposés parallèlement, soit rayonnants autour d'une même verticale en nombre total supérieur à deux.

Lorsque plusieurs versants se trouvent accolés l'un à l'autre suivant des faîtes et des thalwegs alternatifs, et que l'on suit une même ligne de niveau à travers tous ces versants, la déclivité du sol, faible près des faîtes et des thalwegs, passe, comme on a vu, par un minimum dans le voisinage de chacun d'eux et devient, par suite, maximum dans l'intervalle. Les bords des versants sont donc marqués à fort peu près par tout autant de branches de la ligne des déclivités minima, tandis qu'une branche de celle des déclivités maxima les longe vers le milieu de leur largeur.

Les deux versants contigus à une même ligne de thalweg composent le bassin du cours d'eau correspondant. Enfin, l'ensemble des bassins dont les thalwegs se terminent à une même dépression du sol, *mer* ou *lac* (anciens ou actuels), constitue le *bassin* de cette mer ou de ce lac. C'est le lieu de toutes les lignes de pente qui s'y réunissent inférieurement.

Les points de la surface où le plan tangent est horizontal sont, en général, comme on a vu au n° **180*** (p. 231*) : 1° des *sommets*, quand l'*altitude* z y est maximum, c'est-à-dire quand la surface s'y trouve située, tout autour, au-dessous de ce plan tangent ; 2° des *fonds*, dans le cas contraire où l'altitude est minimum, la surface étant au-dessus du plan tangent; 3° enfin, des *cols*, quand la surface est en partie au-dessus de son plan tangent, en partie au-dessous, et que, par suite, l'altitude n'est ni un maximum absolu, ni un minimum absolu, mais seulement un maximum et un minimum relatifs (p. 178).

Les plus remarquables sont ces derniers points, les cols, où vien-

nent d'ordinaire, comme on l'a démontré au n° **180*** (p. 232*), se croiser à angle droit une ligne de faîte, qui remonte des deux côtés, et une ligne de thalweg, qui descend de même des deux côtés, en sorte que deux montagnes et deux vallées s'y réunissent. Les cols constituent ainsi, sur les parties hautes des lignes de séparation des bassins, des points d'altitude minimum. Ils sont donc ceux par où il convient de faire passer les chemins qui doivent franchir des chaînes de montagnes; d'autant plus que les deux thalwegs qui y aboutissent jalonnent déjà, sur les deux flancs, des voies non seulement directes, mais, en même temps, de faible pente (sauf à leurs parties supérieures où il faut le plus souvent les abandonner) et menées par des points où la déclivité du sol est à peu près le moins forte possible, circonstance avantageuse à bien des égards.

Pour les mêmes raisons, on devra, en général, dans le tracé des routes et des canaux à travers des pays accidentés, s'écarter le moins qu'on pourra des lignes des déclivités minima. Celles qui suivent des thalwegs conviendront spécialement pour les routes, comme il vient d'être dit, et celles qui suivent des lignes de faîte d'une assez faible pente, pour les canaux destinés à l'irrigation des deux versants contigus, du moins dans le cas où cette pente présenterait une régularité rendant praticable l'arrosement de deux versants par un seul canal.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

COURBURE DES SURFACES.

186*. — Des formes qu'affecte, en général, une surface, aux environs d'un de ses points : paraboloïde de contact.

Toute surface dont la normale change graduellement de direction quand son pied s'y déplace dans le voisinage d'un point donné (x, y, z), présente autour de ce point certaines circonstances de forme, dépendant de la rapidité avec laquelle, à partir du même point, la normale commence à tourner suivant les divers sens. Ces circonstances de forme, ainsi fonction des cosinus directeurs de la normale en (x, y, z) et de leurs dérivées premières en x et y ou, par suite, des dérivées tant premières que secondes

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}$$

de l'ordonnée $z = f(x, y)$ de la surface, constituent la *courbure* de celle-ci pour le point considéré. Elles expriment à fort peu près, *sauf dans le cas où elles s'évanouissent par le fait de l'annulation de r, s, t,* les petits écarts de la surface d'avec son plan tangent aux environs du point de contact donné (x, y, z), et, par conséquent, différencient entre elles, quant à la forme, les diverses surfaces ou les diverses parties d'une même surface.

Les quantités p, q, r, s, t s'évaluant, quand la surface est définie par une équation implicite comme $F(x, y, z) = c$, au moyen des dérivées partielles des deux premiers ordres de F, on voit que les circonstances dont il s'agit, caractéristiques des diverses formes de surface, dépendront de ces deux ordres de dérivées, comme nous avons vu déjà (p. 220*) qu'il arrivait aux points *singuliers,* où s'annulent les dérivées premières de F.

Imaginons, afin de simplifier autant que possible la question, qu'on transporte l'origine au point donné (x, y, z), en prenant pour axes des x et des y deux tangentes rectangulaires de la surface et pour axe des z la normale, dirigée de telle manière que la coupe de la surface

par le plan des zx ait, près de l'origine, des ordonnées z positives. Les dérivées de z premières et secondes, p, q, r, s, t, qu'il y aura à considérer, se rapporteront donc à l'origine, et, comme elles y seront par hypothèse continues, la fonction $z=f(x,y)$ pourra, dans le voisinage, être développée par la formule de Taylor, suivant les puissances premières et secondes de x et y considérés comme de petits accroissements h, k reçus à partir de cette origine par les deux coordonnées indépendantes : le reste R_2 sera, en général (p. 137*), incomparablement plus faible que les termes du second degré. D'ailleurs, la valeur de z à l'origine étant nulle, ainsi que la pente $\sqrt{p^2+q^2}$, par rapport au plan des xy, du plan tangent mené à cette origine, le terme constant et ceux du premier degré px, qy disparaissent.

Il vient donc simplement, en réduisant la valeur de z à ses termes de l'ordre de petitesse en x et y le moins élevé, qui est ici le deuxième, c'est-à-dire en négligeant R_2,

$$z=\tfrac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2). \tag{1}$$

Or cette équation est celle d'un paraboloïde ayant pour axe principal l'axe des z. On l'appelle le *paraboloïde de contact;* et il a, en effet, avec la surface proposée, un contact généralement du second ordre, puisque la différence existant entre leurs ordonnées z correspondantes est précisément le reste R_2, d'un ordre de petitesse en x et y plus élevé que le second. Ainsi, *toute surface à pentes bien continues ressemble, aux environs d'un quelconque de ses points, à un certain paraboloïde, décrit autour de la normale en ce point comme axe, et dont les écarts d'avec la surface sont, dans le voisinage, d'un ordre de petitesse supérieur au deuxième.* Tout paraboloïde décrit à partir de l'origine autour de l'axe des z comme axe principal ayant d'ailleurs son équation de la forme (1), où r, s, t désigneraient trois coefficients quelconques, on voit que ses écarts d'avec le paraboloïde (1) et, par conséquent, d'avec la surface, aux environs de l'origine, seront de l'ordre des carrés ou produits de x et de y, pour peu que ces coefficients y diffèrent de ce qu'ils sont dans (1). Donc le paraboloïde de contact, pour un point donné, se trouve bien unique et indépendant, par exemple, des x et des y choisis.

Il est évident, de plus, que, si l'on décrit simultanément, à partir du point donné, une quelconque des lignes de la surface qui s'y croisent et celle du paraboloïde qui a même projection sur le plan des xy, les trois coordonnées courantes x, y, z de ces deux lignes seront des fonctions du temps t identiques pour les deux premières x, y et ne différant, pour la troisième z, que par la quantité R_2. Les deux lignes

auront donc, au point considéré, un contact du second ordre et, par conséquent, même cercle osculateur. Autrement dit, *le paraboloïde peut être substitué à la surface, dans l'étude de la courbure offerte en leur point de contact par les lignes de la surface qui s'y croisent et qui ont sur le plan tangent correspondant une projection donnée quelconque.*

187*. — Des deux plans normaux principaux d'une surface, et de ses deux sections principales, en un quelconque de ses points.

On sait qu'il est toujours possible de choisir, dans le plan des xy et à partir de la même origine, deux nouveaux axes rectangulaires des x et des y par rapport auxquels l'expression homogène et du second degré $rx^2 + 2sxy + ty^2$, tout en conservant en chaque point du plan sa valeur primitive, se trouve débarrassée du rectangle xy des variables; c'est le système formé par les axes mêmes des ellipses ou des hyperboles ayant l'équation $rx^2 + 2sxy + ty^2 = \text{const.}$ Or supposons qu'on eût adopté dès l'abord ces axes, qui, faisant disparaître le terme $2sxy$, rendent évidemment nulle, au point pris pour origine, la dérivée seconde oblique s de l'ordonnée. L'équation (1) du paraboloïde de contact deviendra, en la multipliant par 2,

$$(2) \qquad 2z = rx^2 + ty^2,$$

et celle de la surface n'en différera que par l'addition, au second membre, du terme $2R_1$, d'un ordre de petitesse en x et y supérieur au second. Comme les coordonnées x et y ne paraissent dans (2) que par leurs carrés, à chaque point (x, y, z) du paraboloïde il en correspond un second $(x, -y, z)$, symétrique par rapport au plan des zx, et un troisième $(-x, y, z)$, symétrique par rapport au plan des zy. Ainsi, le plan des zx et celui des zy sont des plans de symétrie du paraboloïde et le sont par suite, sensiblement, de la surface proposée, pour le voisinage de l'origine choisie, en ce sens que (sauf le cas où r, s, t s'annuleraient à la fois) la surface s'y trouve infiniment moins dissymétrique par rapport à ces plans que par rapport à d'autres plans normaux quelconques ou menés suivant l'axe des z. Effectivement, elle l'est par rapport à ces derniers dès que l'on ne néglige pas tout à fait la courbure ou que l'on ne réduit pas la surface à son plan tangent.

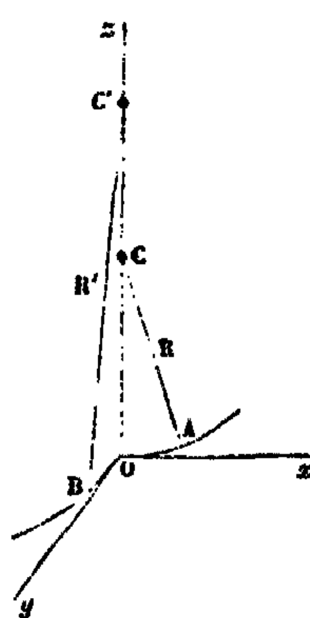
Il existe donc, *en tout point ordinaire d'une surface, deux certains plans, normaux à la surface et rectangulaires entre eux, de part et d'autre desquels elle peut être censée symétrique dans une étendue infiniment petite tout autour.* Ces deux plans sont dits les *plans*

principaux de la surface pour le point considéré; les courbes suivant lesquelles ils coupent la surface s'appellent les deux *sections principales* relatives à ce point, et l'on peut, de même, qualifier de *principales* leurs tangentes, prises ici pour axes des x et des y.

188*. — Propriété caractéristique des sections principales; ombilics.

Les deux sections principales OA, OB d'une surface OAB, pour un point quelconque O, jouissent, en ce point, d'une propriété importante, à l'exclusion des lignes de la surface qui s'y croiseraient suivant d'autres sens. Elle consiste en ce que *deux normales consécutives menées à la surface, l'une, au point considéré* O, *l'autre, à l'extrémité d'un arc infiniment petit* OA *ou* OB *des sections principales, peuvent être censées se couper, c'est-à-dire passent à une distance l'une de l'autre infiniment plus faible que n'est l'écart* OA *ou* OB *de leurs pieds.*

Fig. 32.



En effet, dans le paraboloïde, où il y a symétrie complète de la surface par rapport aux plans zOx et zOy, les normales qui ont leurs pieds sur l'un d'eux, ne pouvant en sortir d'un côté plutôt que de l'autre, s'y trouvent tout entières contenues et, par conséquent, vont y joindre plus ou moins loin la première normale Oz, tandis que la dissymétrie existant par rapport à tout autre plan mené suivant Oz fait pencher, hors de cet autre plan, les normales dont les pieds s'y trouvent situés, d'angles naturellement comparables aux changements mêmes de direction éprouvés par ces normales depuis la position Oz, ou comparables encore, numériquement, au chemin parcouru à partir de O.

On le voit nettement en faisant passer, par le point (x, y, z) du paraboloïde où l'on mène la seconde normale, l'ellipse ou hyperbole, contenue dans cette surface et parallèle aux xy, qui a pour équation $rx^2 + ty^2 = \text{const.}$ La normale au paraboloïde en (x, y, z), étant perpendiculaire à cette courbe, sera contenue dans son plan normal, parallèle à Oz et qui se projette sur le plan de la courbe suivant la propre normale de celle-ci; en sorte que la distance minima, à Oz, de la normale menée en (x, y, z) au paraboloïde, distance évidemment identique à celle de Oz au plan normal dont il s'agit, se trouvera mesurée, sur le plan même de la courbe $rx^2 + ty^2 = \text{const.}$, par la

perpendiculaire allant du centre de celle-ci, situé sur Oz, à la normale émanée de (x, y, z). Or on sait que, dans l'ellipse ou hyperbole $rx^2 + ty^2 =$ const., la normale menée en (x, y, z) passe à une distance du centre comparable au demi-diamètre $\sqrt{x^2+y^2}$ aboutissant à son pied, à moins que celui-ci ne soit dans la direction d'un axe. C'est donc seulement, comme il fallait le démontrer, le long des sections principales, que deux normales au paraboloïde se coupent; et ces sections ne sont, comme les axes de la courbe $rx^2 + ty^2 =$ const., qu'au nombre de deux, *abstraction faite du cas particulier où la courbe* $rx^2 + ty^2 =$ const. *serait un cercle.*

D'ailleurs, quand on passe du paraboloïde à la surface proposée, les cosinus directeurs de la normale et leurs dérivées premières en x et y restent les mêmes à l'origine O; ce qui implique la conservation de l'orientation de cette normale, pour de mêmes petites valeurs quelconques de x et de y, à des changements près d'un ordre de petitesse supérieur au premier. Par conséquent, dans la surface, les normales menées en A et B feront, avec leurs projections respectives AC, BC′ sur les deux plans zOx, zOy, des angles infiniment plus petits que OCA, OC′B, et elles pourront n'être pas distinguées de AC, BC′, alors que, si le plan zOA, par exemple, était un plan normal quelconque, l'angle de la normale menée en A à la surface avec sa projection AC sur ce plan serait comparable à OCA ou, numériquement, à OA, et cette normale passerait, par suite, à une distance du point C, ou de Oz, du même ordre, et non plus infiniment moindre, que OA.

Ce dernier fait s'exprimera donc en disant que, *si, à partir du point* O, *l'on décrit sur la surface un chemin infiniment petit dans toute autre direction que les deux principales* OA, OB *ou leurs opposées, la normale menée à la surface, à la seconde extrémité de ce chemin, n'ira pas rencontrer la normale menée à la première extrémité, mais en passera à une distance du même ordre que l'écart de leurs pieds respectifs, ou que le chemin parcouru.*

Il n'y aurait exception à cette loi que si, comme il a été dit tout à l'heure, les courbes $rx^2 + ty^2 =$ const. avaient plus de deux axes principaux, c'est-à-dire se réduisaient à des cercles. Ce cas se produit quand les deux sections principales OA, OB sont égales dans le paraboloïde, ou, vu les équations (1) et (2), quand on a tout à la fois $s = 0$ et $r = t$ au point considéré. Alors le double de l'ordonnée z, exprimé sensiblement par $r(x^2+y^2)$, ne varie presque qu'avec la distance $\sqrt{x^2+y^2}$ de chaque point à l'axe des z, le paraboloïde est de *révolution* autour de cet axe, et toutes les sections normales, au point O,

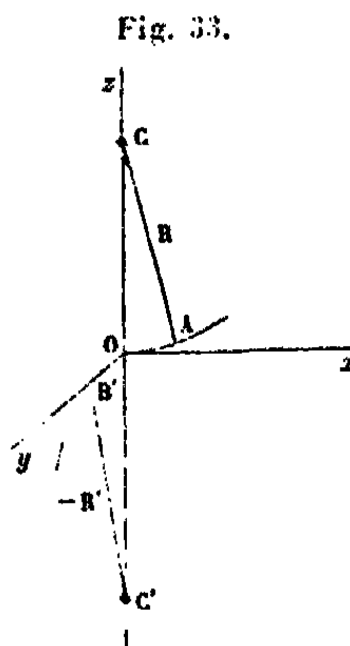
c'est-à-dire toutes les coupes de la surface par des plans menés suivant Oz, deviennent des sections principales, du moins quand ce point est considéré isolément, sans qu'on ait à y regarder les sections principales comme ayant une orientation limite de celle qu'elles ont aux points voisins. Un tel point O est dit un *ombilic*, conformément à la définition donnée plus haut (p. 221*), à propos de certains points singuliers coniques.

189*. — Courbures principales de la surface au point considéré; courbure moyenne et courbure essentielle ou permanente.

Dans la figure précédente (p. 247*), la normale Oz à la surface est donc coupée, en deux points C, C', par les droites voisines AC, BC', qu'on peut supposer normales à la surface et aussi, par suite, aux deux sections principales OA, OB, à des écarts près du second ordre quant à la direction ou négligeables comparativement à des angles de contingence comme OCA, OC'B. Les plans osculateurs des courbes OA, OB étant d'ailleurs zOx et zOy, l'axe Oz est la normale principale en O de celles-ci et, par conséquent, les points C, C' sont (à la limite) leurs centres respectifs de courbure. On les appelle les deux *centres principaux de courbure* de la surface pour le point considéré O.

Les deux rayons de courbure correspondants, OC ou AC, et OC' ou BC', que nous appellerons respectivement R et R', sont dits les deux *rayons de courbure principaux* de la surface relatifs au point O. On convient de les compter positivement quand, sur la normale CC', ils sont dirigés, à partir du point O, du côté qui fait un angle aigu avec les z positifs. C'est ce qui arrivait dans la figure précédente (p. 247*); et l'on peut toujours admettre que l'un des deux rayons soit dans ce cas, si l'on dirige convenablement l'axe Oz. Ce sera ici le premier, R, puisque la section OA a, par hypothèse, ses ordonnées z positives et tourne, par conséquent, sa concavité vers les z positifs. On compterait, au contraire, négativement, un rayon de courbure dirigé, à partir du point O, du côté des ordonnées négatives, conformément, du reste, à une convention déjà faite dans la théorie de la courbure des lignes planes (pp. 66* et 198). C'est ce qui aura

Fig. 33.



lieu pour R' dans la *fig.* 33 (p. 249*), où le second centre principal de courbure, C', se trouve, non plus du même côté de la normale Oz que le premier centre C, mais du côté opposé.

D'après cela, un rayon principal de courbure est positif, quand la section correspondante, OA par exemple, tourne sa concavité du côté des z positifs; et il est négatif quand la section correspondante tourne, au contraire, sa concavité vers les z négatifs, comme il arrive pour OB'.

On étendra naturellement la même convention à toutes les *sections normales*, ou coupes de la surface par les divers plans menés suivant Oz, parfois aussi à toutes les courbes de la surface se croisant en un point considéré et dont les rayons de courbure respectifs, dirigés de ce point vers les centres correspondants, feront avec l'axe des z des angles aigus ou obtus quelconques : le signe positif ou négatif des cosinus de ces angles sera celui des rayons de courbure et de leurs inverses ou courbures.

Enfin ces inverses, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, pour les deux rayons principaux, pris avec leurs signes, sont appelés les deux *courbures principales* de la surface au point considéré. Leur moyenne arithmétique, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$, égale, d'après le théorème d'Euler (p. 78*), la demi-somme des courbures de deux sections normales rectangulaires quelconques faites au même point O, et représente, par suite, la moyenne générale des courbures de toutes les sections pareilles : elle est donc, comme on a vu (p. 76*), la *courbure moyenne* de la surface au point O. Quant à leur moyenne géométrique $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$, son carré $\frac{1}{RR'}$ a été appelé simplement, par Gauss, la *courbure* de la surface au point considéré. La première de ces deux quantités, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$, a une très grande importance dans la théorie physique des phénomènes de capillarité produits à la surface d'un liquide; car la différence des deux pressions existant de part et d'autre de cette surface lui est proportionnelle. La deuxième, $\frac{1}{RR'}$, joue, de son côté, le rôle principal dans la théorie des membranes infiniment minces que l'on déforme par simple flexion, c'est-à-dire en les pliant et dépliant sans allonger ni raccourcir aucune de leurs fibres ou aucune ligne matérielle tracée sur leurs faces; car nous verrons dans la prochaine Leçon, et Gauss a, le premier, démontré que cette quantité $\frac{1}{RR'}$ conserve, en chaque point dé-

terminé de la membrane, sa valeur primitive, quels que soient les changements de forme produits. C'est pourquoi on pourrait la désigner par les termes de *courbure essentielle* ou de *courbure permanente* de la surface, plus justement peut-être que par le simple mot de *courbure;* car elle s'annule dans toutes les *surfaces développables*, ou susceptibles d'être étalées sur un plan (p. 224*), auxquelles il est cependant difficile de ne pas attribuer quelque courbure lorsqu'elles sont effectivement courbes.

190*. — Détermination de la forme d'une surface aux environs d'un point, en fonction des deux rayons principaux de courbure relatifs à ce point.

Les deux coefficients r, t, qui paraissent dans l'équation (2) [p. 246*] du paraboloïde de contact, s'expriment aisément en fonction de R et de R'. Observons, en effet, que R désigne le rayon de courbure, au point O, de la coupe de la surface par le plan des zx, courbe plane dont l'abscisse est x et dont l'ordonnée perpendiculaire z a ses deux dérivées z' et z'' égales respectivement, en O, à p et r. La première de ces dérivées y étant même nulle, la formule usuelle (3) [p. 196] du rayon de courbure d'une courbe plane donne donc simplement, en y remplaçant y' et y'' par zéro et par r, $R=\frac{1}{r}$; ce qui revient à prendre $r=\frac{1}{R}$. On aurait de même, en considérant la coupe de la surface par le plan des zy, $t=\frac{1}{R'}$; et l'équation (2) du paraboloïde de contact, qui définit la forme approchée de la surface aux environs du point considéré O, s'écrira

$$(3) \qquad 2z=\frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R'}.$$

On voit qu'elle ne dépend que de R et R'. Ainsi, *d'une part, la forme approchée de la surface, aux environs d'un quelconque de ses points, est complètement déterminée par les rayons de courbure* R, R', *en ce point, de ses deux sections principales correspondantes, rayons pris en grandeur et en signe; d'autre part, la manière dont cette forme est disposée ou orientée, par rapport au plan tangent mené à la surface au même point, dépend de la direction des deux sections principales qui ont ces rayons de courbure, c'est-à-dire de la position des deux plans normaux principaux.*

Il nous suffira donc de savoir déterminer, en tous les points d'une surface donnée $z=f(x,y)$, les deux directions principales et les

courbures correspondantes, pour être complètement renseigné sur la forme qu'elle affecte partout. Mais, auparavant, achevons d'étudier, au moyen de l'équation (3), les circonstances que peut présenter ordinairement cette forme aux environs du point quelconque choisi pour origine, et déduisons-en la courbure qu'y offrent les diverses lignes s'y croisant sur la surface.

191*. — Surfaces à courbures de même sens et surfaces à courbures opposées : indicatrice.

Dans cette question de la forme qu'affecte une surface aux environs d'un point, deux cas généraux peuvent se présenter, suivant que les deux rayons de courbure principaux R, R′ sont de même signe, ou suivant qu'ils se trouvent, l'un positif, et, l'autre, négatif.

Supposons-les d'abord de même signe et, par conséquent, tous les deux positifs, puisque le choix convenu du sens des z positifs nous donne $R > 0$. Alors les sections principales OA, OB (p. 247*) sont toutes les deux, par rapport au plan tangent xOy, situées du côté de Oz; et la surface est dite *à courbures* $\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}\right)$ *de même sens*. D'après (3), z étant essentiellement positif, ou nul seulement pour $x=0$ et $y=0$, la surface n'a de commun avec son plan tangent xOy que le point de contact, du moins dans le voisinage de celui-ci; et l'on dit qu'elle s'y trouve *toute concave* d'un côté, qui est ici celui des z positifs, et *toute convexe* de l'autre.

Comme le paraboloïde de contact est elliptique, les sections faites dans la surface par des plans $z=$ const., parallèles au plan tangent en O et très voisins de ce plan, sont sensiblement les ellipses ayant pour équation

$$(4) \qquad \frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R'}=\text{la const. } 2z,$$

ellipses semblables, pareillement orientées et de grandeur croissante avec la distance z de leurs plans au point O. Quant aux courbes tracées sur la surface à partir du point considéré O, et dont la tangente en O est, par conséquent, sur le plan xOy, il est clair qu'elles sont toutes concaves, par rapport à Oz, du même côté que la surface. Nous évaluerons bientôt leur courbure.

Passons maintenant au second cas (auquel répond la figure de la p. 249*), où, R′ étant négatif, les centres C et C′ de courbure des deux sections principales OA, OB′ sont, sur la normale Oz, de part et d'autre du point O. Alors l'une de ces sections, OA, tourne sa con-

cavité du côté des z positifs, tandis que l'autre, OB', présente la sienne du côté des z négatifs. La surface est dite, pour cette raison, *à courbures opposées :* elle a, dans le voisinage du point O, une partie, contiguë au plan des zx, qui est, par rapport au plan tangent xOy, du côté des z positifs, et qu'on peut appeler la *partie concave* vers les z positifs ; le reste, contigu au plan des zy, se trouve compris de l'autre côté du plan tangent et constitue la *partie convexe* vers les z positifs.

Ces deux parties ont pour limite commune l'intersection même de la surface par son plan tangent $z = 0$, intersection qu'on obtient en posant $z = 0$ dans l'équation (3) du paraboloïde de contact accrue, à son second membre, du terme complémentaire $2R_2$, d'un ordre de petitesse en x et y supérieur au deuxième. Il vient ainsi, *sensiblement*,

$$(5) \qquad \frac{x^2}{R} - \frac{y^2}{(-R')} = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm x\sqrt{\frac{(-R')}{R}},$$

relation qui représente deux droites passant par le point O et également inclinées de part et d'autre de Ox, ou dont les quatre angles ont pour bissectrices les tangentes Ox, Oy aux deux sections principales. Donc, *la surface est coupée par son plan tangent suivant deux courbes, qui ont pour tangentes, au point de contact* O, *les deux droites* (5), *également inclinées de part et d'autre des tangentes principales* Ox, Oy : *ces deux courbes divisent la surface, autour du point considéré* O, *en quatre régions alternativement concaves et convexes vers les* z *positifs.*

Le paraboloïde de contact, $2z = \frac{x^2}{R} - \frac{y^2}{(-R')}$, est hyperbolique et a la forme d'un col ou du dessus d'une selle de cheval. Les sections planes faites dans la surface, soit du côté des z positifs, soit du côté des z négatifs, parallèlement au plan tangent xOy, et à une très petite distance $\pm z$ de ce plan, sont, près du point O, les hyperboles

$$(6) \qquad \frac{x^2}{R} - \frac{y^2}{(-R')} = \text{la const. } 2z \text{ positive ou négative.}$$

Ces courbes ont toutes, en projection sur le plan tangent xOy, les mêmes asymptotes, que représente précisément l'équation (5), ou auxquelles les hyperboles (6) se réduisent quand z s'annule. Aussi, les deux droites (5), orientées suivant les intersections de la surface par son plan tangent, définissent-elles, à partir du point de contact considéré O, ce qu'on appelle les deux *directions asymptotiques* relatives à ce point.

Des courbes quelconques tracées sur la surface et émanant du point O tourneront évidemment leur concavité du même côté de l'axe des z que la partie de la surface où on les mènera.

Que la surface soit à courbures de même sens ou à courbures opposées, on appelle *indicatrice* la courbe de dimensions finies obtenue, sur le plan tangent xOy, en prenant égale à 1 la valeur absolue de la constante $2z$ dans les équations (4) ou (6) des sections infiniment petites parallèles au plan tangent. Cette courbe *indique* en effet la forme des sections dont il s'agit et, par suite, celle de la surface. On voit qu'elle a pour équation, en appelant X, Y ses coordonnées courantes,

$$\frac{X^2}{R} + \frac{Y^2}{R'} = \pm 1. \tag{7}$$

Elle se réduit donc à une simple ellipse quand les deux courbures principales sont de même sens, parce qu'il ne correspond alors aucun point (X, Y) réel à la valeur -1 du second membre. Mais elle se compose de deux hyperboles *conjuguées*, ayant leurs asymptotes suivant les directions asymptotiques de la surface, quand les courbures sont opposées, vu que l'hyperbole obtenue en prenant $+1$ comme second membre exprime la forme des sections faites du côté du plan tangent où les z sont positifs et que l'autre hyperbole, ayant -1 au second membre, représente de même les sections faites du côté des z négatifs.

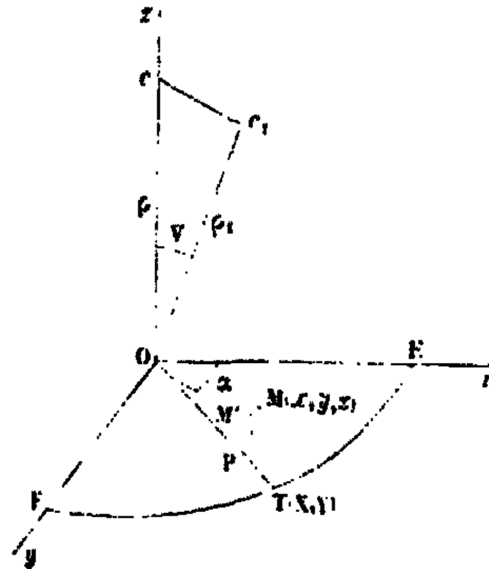
192*. — Courbure des lignes tracées sur une surface : théorèmes d'Euler et de Meusnier.

Occupons-nous enfin de la courbure que présente, au point O, une ligne quelconque OM tracée, en passant par ce point, sur la surface, ou, avec la même projection en xOy, sur le paraboloïde (3) [p. 251*]; ce qui, comme on a vu (p. 246*), lui laisse en O sa tangente OT, sa normale principale Oc_1 et, sur celle-ci, son centre c_1 de courbure. La tangente en question OT sera définie par l'angle α qu'elle fera avec la tangente principale Ox; et, dans le plan zOc_1 perpendiculaire à OT, la normale principale Oc_1 sera elle-même définie par son angle V avec la normale Oz à la surface.

Cela posé, si l'on mène du point $M(x, y, z)$ de la courbe la perpendiculaire MP sur sa tangente OT, et la projection M'P de cette perpendiculaire sur une parallèle aux z, l'angle M'PM ne différera qu'infiniment peu de V, ou de l'angle formé par PM' avec la projection de PM sur le plan osculateur TOc_1; car l'écart MP de la courbe

d'avec la tangente est du second ordre de petitesse, c'est-à-dire comparable à $\overline{\mathrm{OP}}^2$, et contient une infinité de fois son écart d'avec le plan osculateur, mesuré par la droite joignant le point M à sa projection sur $\mathrm{TO}c_1$ et dont le rapport à MP vaut le sinus de la différence des deux

Fig. 34.



angles M′PM et V. Comme d'ailleurs PM′ égale soit $+z$, soit $-z$, suivant que l'angle M′PM est aigu ou obtus, on aura $z = (\mathrm{PM})\cos \mathrm{V}$, à des infiniment petits près d'un ordre supérieur au second, ou, par suite, d'après (3) [p. 251*],

$$(8) \qquad \mathrm{PM} = \frac{z}{\cos \mathrm{V}} = \frac{1}{2\cos \mathrm{V}}\left(\frac{x^2}{\mathrm{R}} + \frac{y^2}{\mathrm{R}'}\right),$$

sauf encore erreur du même ordre, abstraction faite du cas où $\cos \mathrm{V}$ serait infiniment petit, c'est-à-dire où le plan $\mathrm{TO}c_1$ deviendrait tangent en O à la surface. Ce cas excepté, la valeur (8) de PM pourra évidemment être prise, encore avec une erreur d'un ordre supérieur au second, pour la projection de PM sur le plan osculateur $\mathrm{TO}c_1$, ou, autrement dit, pour l'ordonnée, que j'appellerai y_1, de la projection de OM sur ce plan, courbe ayant même centre c_1 de courbure que OM, et dont l'abscisse correspondante, que je désignerai par x_1, serait OP. D'ailleurs, les projections $(\mathrm{OP})\cos\alpha$, $(\mathrm{OP})\sin\alpha$, de OP sur $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$, sont les deux coordonnées du point P ou, à des erreurs relatives près négligeables, les deux premières x, y de M; d'où résultent les deux valeurs infiniment approchées $x = x_1\cos\alpha$, $y = x_1\sin\alpha$, de x et de y, en fonction de l'abscisse x_1, à substituer dans (8). Et celle-ci (8) donne alors, comme expression de l'ordonnée

y_1 d'une courbe plane ayant, en O, un contact de second ordre avec OM,

$$(9) \qquad y_1 = \frac{1}{\cos V}\left(\frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}\right)\frac{x_1^2}{2}.$$

La dérivée première de y_1 en x_1 se trouve donc nulle à l'origine O, et il résulte de la valeur constante de sa dérivée seconde, en appelant ρ_1 le rayon de courbure Oc_1, que la courbure cherchée en ce point, exprimée par cette dérivée seconde, est

$$(10) \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\cos V}\left(\frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}\right).$$

Appelons ρ le rayon Oc de courbure de la section normale *correspondante*, qui serait menée suivant zOT ou pour laquelle on aurait V = soit zéro, soit π, suivant le signe positif ou négatif de la parenthèse de (9). Alors cette formule, en y attribuant à ρ, puis à ρ_1, le signe même de z ou de $\cos V$, comme il a été convenu (p. 250*), permettra d'abord de poser

$$(11) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}$$

et deviendra ensuite

$$(12) \qquad \rho_1 = \rho\cos V,$$

pourvu que l'on prenne $\cos V$ en valeur absolue ou qu'on appelle maintenant V l'angle toujours aigu cOc_1.

Or les deux formules (11) et (12) comportent un sens géométrique très simple.

Pour interpréter la première, menons le demi-diamètre OT de l'indicatrice EF tangent en O à la section normale considérée. Les coordonnées du point T seront $X = (OT)\cos\alpha$, $Y = (OT)\sin\alpha$, et ces valeurs portées dans l'équation (7) de l'indicatrice conduiront à une valeur de l'inverse de OT^2 qui, comparée à celle, (11), de l'inverse de ρ, donnera $\rho = \pm\overline{OT}^2$. Donc, *le rayon de courbure de toute section normale égale, en valeur absolue, le carré du demi-diamètre suivant lequel cette section coupe l'indicatrice.* D'où il suit qu'il varie symétriquement de part et d'autre des sections principales; qu'il devient maximum ou minimum sur celles-ci; que, suivant les directions asymptotiques, il est infini ou implique une courbure nulle des sections normales; etc. : circonstances remarquées en premier lieu par Euler. On en déduit aussi, vu la constance de la somme ou de la différence des carrés des inverses de deux demi-diamètres rectangulaires d'une

ellipse ou d'une hyperbole, un autre théorème d'Euler, démontré plus haut (p. 78*). Il s'obtient, du reste, de suite, en observant que la formule (11), appliquée à la courbure, $\frac{1}{\rho'}$, de la section normale perpendiculaire à la proposée, ou pour laquelle α devient $\alpha + \frac{\pi}{2}$, donne

$$(13) \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'},$$

et, par suite, en ajoutant (13) à (11),

$$(14) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

Quant à la formule (12), elle exprime que Oc_1 ou ρ_1 est la projection de Oc ou ρ sous l'angle V, c'est-à-dire que la droite cc_1 est perpendiculaire à l'arête Oc_1 de l'angle dièdre droit cOc_1T et, par suite, à la face c_1OT de cet angle dièdre. *Donc le centre c_1 de courbure, pour le point quelconque* O *de toute courbe* OM *située sur la surface et tangente en ce point à une section normale donnée, est la projection, sur son plan osculateur* c_1OT, *du centre c de courbure de cette section normale.* Autrement dit, si l'on conçoit la sphère décrite autour du centre c de la section normale et tangente en O à la surface, son intersection par le plan osculateur de la courbe donnée sera le cercle même de courbure de cette courbe, vu que ce cercle aura évidemment pour centre la projection c_1 du centre c de la sphère.

Tel est, sous diverses formes, le théorème, dû au géomètre français Meusnier, qui permet d'obtenir la courbure d'une ligne quelconque d'une surface, sauf parfois dans le cas, restant à examiner, où l'angle V est droit, c'est-à-dire où la courbe proposée a précisément pour plan osculateur en O le plan tangent à la surface.

Jetons enfin un coup d'œil sur ce cas exceptionnel. Si l'on remet, au lieu de V, dans le troisième membre de (8), l'angle M'PM, dont le cosinus tendra vers $\pm\cos V$ ou zéro, ce troisième membre sera encore la partie principale de l'écart PM de la courbe OM considérée d'avec sa tangente OT, pourvu que le facteur binôme entre parenthèses n'y passe pas à un ordre de petitesse supérieur au second; et la présence du dénominateur cos M'PM y abaissera, au-dessous de ce second ordre en x et y, ou en x_1, la valeur de PM ou celle de y_1; ce qui rendra infinie la courbure de OM en O. Or elle est aussi infinie quand le binôme entre parenthèses devient d'un ordre supérieur au second par le fait de l'annulation séparée de chacun de ses termes; car l'arc OM, alors réduit au *point isolé* O ($x = 0$, $y = 0$), peut être censé y tourner infiniment vite sur lui-même. Et il est clair, d'ailleurs, que la seule

manière, à part la précédente, d'élever l'ordre de petitesse du même binôme, consiste dans la neutralisation mutuelle de ses termes en x^2 et y^2, impliquant la tangence de OM, en O, à une des deux directions asymptotiques, sur lesquelles ρ devient infini. Donc le rayon de courbure cherché ρ_1 s'annule, et la formule (12) de Meusnier, donnant $\rho_1 = \rho \times 0 = 0$, reste applicable (comme l'aurait fait inférer la raison de continuité à partir des valeurs de cos V voisines de zéro), *pourvu que la tangente* OT *ne coïncide pas avec une direction asymptotique en* O : cas tout spécial où la limite cherchée du produit $\rho \cos V$, affectant la forme indéterminée $\infty \times 0$, ne peut être obtenue que par la mise en compte des termes du troisième ordre de petitesse compris dans R_2. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent, où la formule (5) nous a montré que la suppression de R_2 réduit les deux valeurs de y à leur partie du premier degré en x et fait ainsi substituer aux deux branches de cette ligne leurs simples tangentes.

193*. — Formule générale de cette courbure.

La relation (10) se démontre encore par une voie analytique très simple et sous une forme plus générale n'impliquant pas le choix de la direction du plan tangent pour celle des xy. Si l'on conçoit que l'arc de la courbe proposée soit la variable indépendante relative à cette courbe, les trois cosinus directeurs de sa normale principale Oc_1 égaleront respectivement, d'après les expressions (25) de la page 210*, $\rho_1 x''$, $\rho_1 y''$, $\rho_1 z''$, tandis que ceux de la normale Oc à la surface sont, vu les formules (24) de la page 258, $\frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$. Donc le cosinus de l'angle V de ces directions, somme des trois produits deux à deux des précédents, vaudra $\frac{\rho_1(z''-px''-qy'')}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; et l'on aura, par suite,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\cos V}\,\frac{z''-px''-qy''}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{15}$$

Or, en observant que les trois fonctions x, y, z de l'arc vérifient constamment l'équation $z - f(x, y) = 0$ de la surface, et que les dérivées partielles des deux premiers ordres de $f(x, y)$ sont p, q, r, s, t, il est aisé d'éliminer de l'expression $z''-px''-qy''$ les dérivées secondes de x, y, z, pour substituer, à la place, les dérivées premières x', y', cosinus directeurs *donnés* des angles que fait avec les x et les y la tangente à la courbe. Il vient, en effet, au moyen d'une pre-

mière différentiation de $z-f(x,y)=0$ par rapport à l'arc, $z'-px'-qy'=0$; et une seconde différentiation donne ensuite

$$\left\{\begin{aligned} z''-px''-qy'' &= p'x'+q'y' \\ &= (rx'+sy')x'+(sx'+ty')y' = rx'^2+2sx'y'+ty'^2. \end{aligned}\right.$$

La formule (15) devient donc celle qu'il s'agissait d'obtenir :

$$(16) \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\cos V}\,\frac{rx'^2+2sx'y'+ty'^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Il suffit, pour en déduire la précédente (10), dont nous nous sommes servi, d'adopter les deux tangentes principales au point considéré pour axes des x et des y, ce qui permet de poser, tout à la fois,

$$p=0,\quad q=0,\quad s=0,\quad r=\frac{1}{R},\quad t=\frac{1}{R'},\quad x'=\cos\alpha,\quad y'=\sin\alpha.$$

194*. — Calcul des directions et courbures principales, de la courbure moyenne et de la courbure permanente, pour les divers points d'une surface.

Voyons enfin comment, pour un point quelconque (x, y, z) de la surface proposée qu'exprime en coordonnées rectangles l'équation $z=f(x,y)$, on déterminera les deux directions principales, les rayons correspondants principaux R, R' de courbure, et les deux directions asymptotiques.

Une direction quelconque sur la surface sera définie par le coefficient angulaire y' de sa projection sur le plan des xy, plan où les x, par exemple, seront pris comme abscisses et les y comme ordonnées. Si donc on appelle dx, dy, dz les trois projections, suivant les axes, d'un chemin infiniment petit ou *élément rectiligne* décrit sur la surface à partir de (x, y, z), son orientation sera fixée au moyen du rapport y' de dy à dx, et l'on aura d'abord $dy=y'\,dx$, puis $dz=p\,dx+q\,dy=(p+qy')\,dx$, vu que $z=f(x,y)$; et, de même, les variations dp, dq des dérivées premières p, q, le long de l'élément rectiligne, seront

$$dp=r\,dx+s\,dy=(r+sy')\,dx,\qquad dq=s\,dx+t\,dy=(s+ty')\,dx.$$

L'élément rectiligne dont il s'agit se trouvera situé suivant une direction principale, à la condition nécessaire et suffisante (p. 247*) que les deux normales, à la surface, menées à ses deux extrémités (x, y, z) et $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$, se rencontrent, du moins à des infiniment petits du deuxième ordre près, c'est-à-dire à la condition de modifier convenablement, de quantités de cet ordre au plus,

l'orientation de la seconde. Or les équations de la première de ces deux normales sont (p. 258)

$$(17)\qquad x_1 - x + p(z_1 - z) = 0,\qquad y_1 - y + q(z_1 - z) = 0;$$

et l'on en déduit celles de la seconde en y faisant croître x, y, z, p, q de leurs différentielles respectives le long de l'élément; ce qui donne

$$(18)\qquad \begin{cases} x_1 - x - dx + (p + dp)(z_1 - z - dz) = 0, \\ y_1 - y - dy + (q + dq)(z_1 - z - dz) = 0. \end{cases}$$

Devant prendre ensemble ces quatre équations (17), (18) après avoir, au besoin, fait subir dans les deux dernières à dp et dq des altérations du second ordre, et devant exprimer qu'un même système de valeurs de x_1, y_1, z_1 les vérifie, nous pouvons remplacer les dernières (18), censées modifiées comme il est dit, par leurs excédents respectifs sur les deux premières, (17). Il vient ainsi, à des infiniment petits près du second ordre,

$$-dx - p\,dz + (z_1 - z)\,dp = 0,\qquad -dy - q\,dz + (z_1 - z)\,dq = 0,$$

ou, par la substitution à dy, dz, dp, dq de leurs valeurs ci-dessus, suivie d'une division finale par dx et de la suppression des termes qui disparaissent à la limite,

$$(19)\qquad \begin{cases} -1 - p(p + qy') + (z_1 - z)(r + sy') = 0, \\ -y' - q(p + qy') + (z_1 - z)(s + ty') = 0. \end{cases}$$

On a donc bien les quatre équations (19) et (17) pour déterminer les inconnues en même nombre y', z_1, x_1, y_1, dont la première définit la direction principale demandée et dont les trois autres seront les coordonnées du point limite de rencontre des deux normales, c'est-à-dire du centre principal correspondant de courbure. Les deux dernières, (19), suffiront pour évaluer y' et la projection $z_1 - z$, sur l'axe des z, du rayon principal de courbure cherché, que j'appellerai ici R, projection d'où l'on déduira le rayon R lui-même en observant que, dirigé suivant la normale, il fait avec les z positifs l'angle ayant pour cosinus $\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$. Après que $z_1 - z$ sera connu, on aura donc R par la formule

$$(20)\qquad R = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,(z_1 - z),$$

si l'on convient, comme il a été fait plus haut (p. 250*), d'attribuer à R le signe même de sa projection $z_1 - z$, c'est-à-dire de prendre le rayon de courbure R positif ou négatif suivant qu'il est porté sur la

normale à la surface, à partir de (x, y, z), du côté qui fait avec une parallèle à la partie positive de l'axe des z un angle aigu, ou suivant qu'il l'est du côté opposé.

Nous aurons d'abord l'équation propre à donner y', en éliminant $z_1 - z$ entre les deux relations (19); ce qui se fera, par exemple, en égalant les deux valeurs qu'on en tire pour $z_1 - z$. Il vient ainsi, après l'évanouissement des dénominateurs et la réduction des termes semblables,

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &[(1+q^2)s - pqt]y'^2 \\ &\quad + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]y' + [pqr - (1+p^2)s] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est du second degré, comme on pouvait le prévoir, puisqu'on savait qu'elle devait donner deux directions principales distinctes ou avoir deux racines. La perpendicularité de ces directions se reconnaît aisément quand le plan des xy adopté est parallèle au plan tangent en (x, y, z) et que, par suite, la projection sur le plan des xy ne détruit pas la perpendicularité des deux droites ayant les coefficients angulaires y'. Alors, en effet, on a $p = 0$, $q = 0$, et le rapport des deux coefficients extrêmes dans (21), produit de ces deux racines ou coefficients angulaires, vaut -1; de sorte que les deux valeurs de y' sont bien les tangentes d'angles complémentaires et adjacents, ou situés, par rapport à une parallèle aux x positifs émanée de leur sommet, l'un d'un côté et l'autre de l'autre.

Quand l'équation (21) aura fait connaître la valeur de y' définissant une direction principale, l'une des relations (19) donnera $z_1 - z$ et alors la valeur R du rayon principal correspondant de courbure résultera de (20). Mais on peut aussi former directement l'équation qui a pour racines les deux valeurs de R, en éliminant y', entre les deux relations (19), de la même manière qu'on en a éliminé $z_1 - z$; et il vient

$$(22) \left\{ \begin{aligned} &(rt - s^2)(z_1 - z)^2 \\ &\quad - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t](z_1 - z) + (1+p^2+q^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons, dans celle-ci, $z_1 - z$ par sa valeur tirée de (20), et divisons par $(1+p^2+q^2)R^2$, afin d'obtenir une équation dont les racines soient les courbures principales ou les inverses des rayons R. Nous aurons, en changeant l'ordre des termes,

$$(23) \quad \frac{1}{R^2} - \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{R} + \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = 0.$$

Le coefficient, changé de signe, du second terme de celle-ci, est la

somme des deux racines, qui sont, avec nos notations, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$; et le coefficient du troisième terme en est le produit. L'équation (23) revient donc à prendre pour le double de la *courbure moyenne* et pour la *courbure permanente* de la surface, les expressions

$$(24)\quad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{1}{RR'}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Il est aisé de voir que la première de ces deux expressions, réduite de moitié, équivaut à celle, (37), de la page 77*, que nous avons trouvée au n° 61* en interprétant géométriquement les paramètres différentiels de certaines fonctions. Celle-ci, en effet, doublée, n'était autre que

$$\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

et il aurait suffi d'y effectuer les deux différentiations en x et y indiquées, puis de réduire, pour avoir identiquement le second membre de la première (24).

193*. — Caractères analytiques et détermination des ombilics d'une surface.

Nous avons vu (p. 249*) qu'on appelle *ombilics* les points (x, y, z) d'une surface où le paraboloïde de contact est de révolution, et que ces points sont parfaitement caractérisés par l'existence d'une infinité de sections, en émanant, le long desquelles une normale à la surface, dans le voisinage de celle qui est menée par le point (x, y, z), va passer à une distance de celle-ci infiniment moindre que l'écart mutuel de leurs pieds. Autrement dit, les racines de l'équation (21) y sont au nombre de plus de deux, et, par suite, le premier membre de cette équation du second degré s'y réduit à zéro, quel que soit y', ou y a ses trois coefficients nuls. Or l'annulation de ces trois coefficients revient à poser la double égalité

$$(25)\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2},$$

qu'on peut écrire encore

$$(26)\qquad \frac{d}{dy}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,\qquad \frac{d}{dx}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,$$

comme le montre le calcul développé, dans celles-ci, des deux dérivées

qui y figurent, suivi de la multiplication des résultats par la puissance $\frac{3}{2}$ de $1+p^2+q^2$.

Les deux égalités (25) constituent des conditions non seulement nécessaires, mais, de plus, suffisantes, pour qu'un point de la surface soit un ombilic; car, dès qu'elles sont vérifiées, les équations (19) se trouvent, quel que soit y', effectivement compatibles, et donnent à $z_1 - z$ une valeur constante, inverse des trois rapports égaux (25). Toutes les sections normales menées en (x, y, z) ont donc leurs cercles osculateurs égaux, formant ensemble une *sphère osculatrice* à la surface; ce qui indique bien que cette dernière est sensiblement de révolution dans le voisinage du point considéré (x, y, z).

Les ombilics font partie des lignes des déclivités maxima ou minima; car, les normales à la surface dans une étendue infiniment petite tout autour aboutissant au centre de la sphère osculatrice (à des écarts près du second ordre de petitesse), le plan vertical de l'une d'elles, menée à partir de l'ombilic, peut être censé en contenir une seconde, issue de l'extrémité de l'élément de ligne de pente émané aussi de l'ombilic; ce que nous savons (p. 238*) caractériser parfaitement les lignes des déclivités maxima ou minima. Aussi la double proportion (25) entraîne-t-elle la vérification de l'équation (37) [p. 239*] des lignes dont il s'agit, et qui consiste dans l'égalité du second rapport (25) à celui qu'on forme en retranchant respectivement des termes du premier ceux du troisième. Il suit de là, et de la propriété de maximum ou minimum qui nous a servi à définir ces lignes (p. 237*), que la déclivité $\tang\gamma$ de la surface a sa différentielle, le long d'une ligne de niveau $z=$ const., nulle à partir de tout ombilic; ce qui revient à y écrire $d\gamma = 0$ ou encore $d\cos\gamma = 0$, quand z ne varie pas. Et comme la direction de la verticale pourrait être aussi bien prise pour celle ou des x, ou des y, que pour celle des z on aura plus généralement, à tout ombilic, en appelant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus directeurs de la normale, les trois égalités

$$(26\ bis)\qquad d(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 0 \ (\text{pour } x, \text{ ou } y, \text{ ou } z \text{ constant}),$$

dont les deux premières sont évidemment identiques à (26) ou, par suite, équivalentes à (25).

Les deux équations (25) ne contiennent que deux inconnues distinctes, savoir, les coordonnées indépendantes x, y, dont les dérivées p, q, r, s, t de $z=f(x,y)$ sont des fonctions données : il arrivera donc fréquemment qu'elles admettront un certain nombre de solutions; et alors la surface possédera tout autant d'ombilics. Quelquefois, la forme de la fonction $f(x,y)$ sera telle, qu'il suffira de vérifier une des

deux équations (25) pour que l'autre soit satisfaite d'elle-même ; et, alors, une seule relation entre x et y exprimera l'existence d'un ombilic. Il y aura donc sur la surface toute une ligne d'ombilics : on l'appelle *ligne ombilicale* ou encore *ligne des courbures sphériques* de la surface, pour rappeler que celle-ci y comporte en tous les points une sphère osculatrice.

Enfin la sphère est la seule surface dont l'ordonnée z vérifie identiquement les deux équations (25) ou dont tous les points soient des ombilics, comme Monge l'a reconnu le premier. On le voit de suite en observant que les trois relations (26 *bis*), alors satisfaites sur toute l'étendue de la surface, astreignent $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ à être trois certaines fonctions de la seule coordonnée correspondante x, ou y, ou z. Si l'on appelle X, Y, Z ces trois fonctions, la relation concernant la somme des carrés des trois cosinus donnera, comme équation de la surface, $X^2+Y^2+Z^2=1$. Or on sait (p. 59*) que les dérivées en x, y, z du premier membre de celle-ci, savoir $2XX'$, $2YY'$, $2ZZ'$, sont proportionnelles aux cosinus directeurs, X, Y, Z, de la normale; ce qui donne $X'=Y'=Z'$. Et comme X' ne peut pas plus dépendre de y et z, que Y' de z et x, ou que Z' de x et y, leur valeur commune sera une même constante, $\frac{1}{R}$; d'où, en désignant par A, B, C d'autres constantes, $X=\frac{x-A}{R}$, $Y=\frac{y-B}{R}$, $Z=\frac{z-C}{R}$. Enfin, l'équation $X^2+Y^2+Z^2=1$ deviendra bien celle d'une sphère,

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=R^2.$$

Un exemple simple de l'emploi des relations (25) consiste à chercher les ombilics d'un ellipsoïde dont les trois demi-axes a, b, c, rangés par ordre de grandeur décroissante, sont pris pour axes respectifs des coordonnées x, y, z. Mais il est encore plus simple d'y observer que toutes les sections de cette surface du second degré, grandes ou petites, parallèles à un même plan tangent, sont des coniques semblables; en sorte que, dans le cas d'un plan tangent mené à un ombilic, elles se réduisent à des cercles, comme l'indicatrice correspondante image des sections infiniment petites. Ces sections constituent donc un des deux systèmes des plans cycliques de l'ellipsoïde. Ainsi, la surface admet quatre ombilics, situés aux extrémités des deux diamètres conjugués aux plans cycliques, diamètres ayant, comme on sait, leurs quatre angles bissectés par les deux axes extrêmes $2a$, $2c$ de l'ellipsoïde.

196*. — Calcul des directions asymptotiques pour les divers points d'une surface.

Cherchons enfin, pour chaque point (x, y, z) de la surface que définit, en coordonnées rectilignes quelconques, une équation de la forme $z = f(x, y)$, les *directions asymptotiques*, suivant lesquelles la surface est coupée par son plan tangent. Appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point de la surface voisin de (x, y, z), et nous aurons, par la formule de Taylor appliquée à la fonction $z_1 = f(x_1, y_1) = f[x + (x_1 - x), y + (y_1 - y)]$,

$$(27)\quad \begin{cases} z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y) \\ \qquad + \frac{1}{2}[r(x_1 - x)^2 + 2s(x_1 - x)(y_1 - y) + t(y_1 - y)^2] + \ldots \end{cases}$$

Ce point devant, ici, vérifier en outre l'équation du plan tangent

$$(28)\qquad z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y),$$

la différence des deux relations (27), (28) donnera, en x_1 et y_1, l'équation de la projection, sur les xy, de l'intersection de la surface et du plan :

$$(29)\quad \tfrac{1}{2}[r(x_1 - x)^2 + 2s(x_1 - x)(y_1 - y) + t(y_1 - y)^2] + \ldots = 0.$$

Admettons actuellement que le point (x_1, y_1, z_1) soit infiniment proche de (x, y, z), ou réduisons l'arc de courbe qui joint ces deux points à un simple élément rectiligne, dont les projections (rectangulaires ou obliques) sur les axes, $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, seront de simples différentielles dx, dy, dz des coordonnées le long de cet arc. La relation (29) divisée par $\frac{1}{2} dx^2$ deviendra, en appelant encore y' le rapport de dy à dx qui définit la direction suivie, et en supprimant les termes qui s'évanouissent,

$$(30)\qquad r + 2sy' + ty'^2 = 0.$$

Telle est l'équation du second degré dont les deux racines sont les coefficients angulaires des deux directions asymptotiques, pour le point (x, y, z), projetées sur le plan des xy. Ces racines ne sont réelles qu'autant que l'on a $s^2 - rt > 0$, comme on pouvait le prévoir, du moins dans le cas d'axes rectangles, en observant que l'expression (24) [p. 262*] du produit des deux courbures principales est, alors et seulement alors, négative, comme il le faut pour que la surface ait ses deux courbures de sens opposés et coupe son plan tangent.

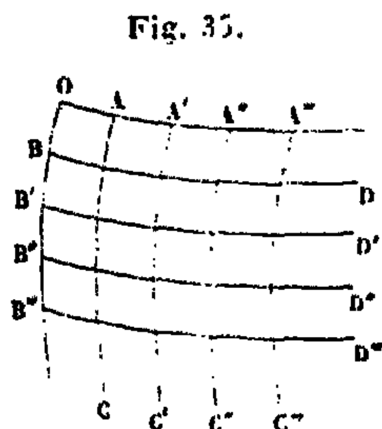
VINGTIÈME LEÇON.

LIGNES DE COURBURE ET LIGNES ASYMPTOTIQUES. SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX DE SURFACES ET TRANSFORMATIONS PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES. NOTIONS SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES ET SUR LES SURFACES APPLICABLES LIGNES GÉODÉSIQUES.

197*. — Des lignes de courbure, dans une surface quelconque.

Prenons sur une surface un point quelconque O, et menons à partir de ce point, sur des longueurs infiniment petites, les deux sections principales OA, OB qui lui sont relatives. Puis, à partir des points A et B, menons de même, sur des longueurs infiniment petites encore, les sections principales AA′, BB′, relatives respectivement aux points A, B, et dont les directions diffèrent infiniment peu, par raison de continuité, de celles de OA et de OB. A partir des nouvelles extrémités obtenues A′, B′, tirons encore, sur des longueurs infiniment petites, les sections principales A′A″, B′B″, relatives aux points A′, B′ et qui font, avec les prolongements de AA′ et de BB′, des angles infiniment petits. En continuant de même, nous tracerons évidemment sur la surface, à la limite, deux certaines courbes, OAA′A″A‴... et OBB′B″B‴..., se croisant à angle droit au point O. Comme d'ailleurs la propriété caractéristique des sections principales consiste en ce que les normales à la surface, issues de deux consécutifs de leurs points, passent à une distance minima l'une de l'autre infiniment plus faible que l'écart de leurs pieds, les deux courbes OAA′... et OBB′... seront telles, que les normales menées à la surface en leurs divers points pourront être censées se couper successivement, ou formeront une *surface* développable (p. 224*).

Fig. 35.



Plus exactement, chacune d'elles s'écartera, de quantités d'un ordre de petitesse supérieur au premier, du plan mené par son pied suivant

la précédente; et tous les éléments rectilignes (du premier ordre de petitesse) joignant un point quelconque de celle-ci aux points de l'autre voisins, ou appartenant à la surface lieu de la série considérée de normales, feront par suite des angles infiniment petits avec ce même plan, dès lors aussi peu différent que l'on voudra, pour la direction, du plan tangent à la surface en un point quelconque de la génératrice rectiligne suivant laquelle on l'aura mené. Donc le plan qui passe par une quelconque des normales données et par le pied d'une autre voisine devient, à la limite, tangent tout le long de la première de ces droites à la *normalie* (ou lieu d'une suite de normales) dont il s'agit; et comme, en menant à côté un second plan, tangent aussi tout le long de la génératrice contiguë, puis à la suite un troisième, etc., chacun de ces plans sera (p. 223*) coupé par le suivant infiniment près de ses points de contact avec la normalie même, celle-ci ne différera pas de ce qu'est, à la limite, le lieu des intersections successives des plans ainsi obtenus, ou se composera de bandes planes infiniment longues et étroites juxtaposées, pouvant évidemment s'étaler sans déchirure sur un seul plan par des rotations opérées autour de leurs droites de jonction. Elle sera donc bien une *surface développable,* comme celle dont il a été parlé plus haut (à la page 224* citée).

Enfin, la même construction étant possible où que soit pris le point O, il passe par tous les points de la surface deux courbes analogues à OA″ et OB″.

Ces courbes, ..., AC, A′C′, A″C″, ... et ..., BD, B′D′, B″D″, ..., ont été appelées par Monge, qui les a découvertes, les *lignes de courbure* de la surface. Il est clair qu'elles constituent sur celle-ci une double famille de lignes *orthogonales*, c'est-à-dire se croisant partout à angle droit, le long desquelles les normales à la surface se joignent *successivement*. On voit qu'elles découpent la surface en rectangles infiniment petits et que leurs tangentes en chaque point font connaître les directions des deux sections principales qu'on y mènerait.

Cette double famille de courbes est évidemment déterminée sur la surface $z = f(x, y)$, dès que l'on connaît leurs projections sur le plan des xy ou leur équation finie en x et y. Or le coefficient angulaire y' qui fixe leur direction s'y trouve directement donné, en chaque point (x, y), par la relation (21) [p. 261*] de la dernière Leçon. Cette relation est ainsi l'*équation différentielle des lignes de courbure* projetées sur le plan des xy, et, définissant de proche en proche leur direction, elle permet de les obtenir à partir d'un point de départ choisi à volonté, de même que l'équation différentielle des *lignes de pente* nous a servi (p. 231*) à trouver leur équation finie.

Dans certains cas simples, des considérations directes permettent de construire sans calcul les lignes de courbure. Quand il s'agit, par exemple, d'une *surface de révolution*, que nous supposerons, pour fixer les idées, décrite autour de l'axe des z par une courbe donnée dans le plan des zx, les diverses positions de cette courbe, dites les courbes méridiennes ou les *méridiens* de la surface, composent une des deux familles de lignes de courbure : en effet, par raison de symétrie, les normales à la surface menées aux divers points de l'une d'elles ne sortent pas de son plan et s'y coupent ainsi successivement. D'un autre côté, les cercles décrits autour de l'axe des z par les divers points de la courbe génératrice, cercles appelés les *parallèles* de la surface, constituent la seconde famille des lignes de courbure; car, le long de l'un d'eux, les normales à la surface ne sont autre chose que les positions successives d'une même normale à la courbe génératrice et aboutissent toutes au point fixe où cette normale rencontre l'axe des z.

Si nous prenons comme exemple le *tore*, ou anneau engendré par une circonférence qui tourne autour d'une droite de son plan ne la rencontrant pas, les deux familles de lignes de courbure seront donc des cercles. L'un des deux rayons de courbure principaux en chaque point s'y confondra avec le rayon constant du cercle méridien, c'est-à-dire de la ligne même correspondante de courbure. Quant à l'autre, il sera le segment de normale compris depuis le point donné du tore jusqu'à l'axe des z; et il différera, par conséquent, du rayon du parallèle correspondant ou de la seconde ligne de courbure, rayon allant perpendiculairement sur l'axe de révolution ou des z à partir du point donné.

Cet exemple montre qu'il faut, en général, se garder de confondre ensemble les deux cercles osculateurs de la ligne de courbure et de la section principale qui lui est tangente; mais on déduira l'un de l'autre par le théorème de Meusnier (p. 257*), quand l'angle du plan osculateur de la ligne de courbure avec la normale à la surface sera connu.

198*. — Des lignes asymptotiques, dans les surfaces à courbures opposées.

Lorsqu'une surface est à courbures opposées, on peut, en opérant comme tout à l'heure pour les lignes de courbure, la parcourir de proche en proche, à partir d'un point quelconque, dans des directions qui coïncident en chaque endroit avec les directions asymptotiques,

c'est-à-dire avec celles suivant lesquelles la surface est coupée par le plan tangent mené au même endroit. Les courbes ainsi décrites sont appelées les *lignes asymptotiques* de la surface. D'après ce qui a été dit dans la Leçon précédente (p. 253* et 265*) sur les directions asymptotiques, il passe deux de ces lignes par chaque point de la surface, et les quatre angles qu'elles y forment sont bissectés par les lignes de courbure s'y croisant.

Les lignes asymptotiques ont pour plans osculateurs les plans tangents mêmes de la surface. Celle-ci, en effet, aux environs de son point de contact avec un de ses plans tangents, s'écarte, par raison de continuité, infiniment moins vite de ce plan, quand on s'y éloigne du point de contact tangentiellement à la ligne commune à la surface et au plan, que lorsqu'on s'en éloigne suivant une direction quelconque. Donc les petits écarts de la ligne asymptotique d'avec le plan tangent sont d'un ordre de petitesse supérieur au second, ou incomparablement plus faibles que ceux que présentent les courbes de la surface, simplement tangentes au plan, menées dans d'autres directions; et l'on sait que le seul plan avec lequel une courbe donnée présente des écarts d'un ordre de petitesse plus élevé que le deuxième, est le plan osculateur de cette courbe. Or il suit de là, si l'on considère la courbure des lignes asymptotiques, que ces lignes entrent dans le cas d'exception (p. 258*) où le théorème de Meusnier devient illusoire.

La relation (30) [p. 265*] de la dernière Leçon est évidemment l'équation différentielle des lignes asymptotiques, ou plutôt de leur projection sur le plan des xy, projection dont cette relation donne le coefficient angulaire y' en fonction des coordonnées x, y de chaque point; et, déterminant de proche en proche la direction de ces lignes, elle permettra de les obtenir, de même que l'équation (21) fera connaître les lignes de courbure. Mais on peut quelquefois, par des considérations plus directes, se rendre très simplement compte de leur forme générale.

Par exemple, à la surface d'un tore dont la circonférence génératrice a son centre à une distance donnée a de l'axe de révolution, les deux rayons de courbure principaux, sur tout parallèle d'un rayon ι moindre que a, ou en tout point situé à cette distance ι de l'axe, sont de sens opposés, et menés, suivant la normale au cercle méridien correspondant, l'un, R, de ce point au centre du cercle, l'autre, $-R'$, du même point à l'axe de révolution ou des z; et ces deux rayons sont entre eux comme leurs projections respectives $a-\iota$ et ι sur le plan des xy. D'après la formule (5) [p. 253*] de la dernière Leçon,

la tangente de l'angle fait sur la surface en ce point, avec le méridien, par les deux lignes asymptotiques, sera $\sqrt{\frac{-R'}{R}} = \sqrt{\frac{\iota}{a-\iota}}$; d'où résulte pour le sinus du même angle, ou pour le cosinus de l'angle complémentaire sous lequel les lignes asymptotiques coupent les *parallèles*, la valeur $\sqrt{\frac{\iota}{a}}$. Ce dernier angle, nul sur les deux parallèles de rayon a, cercles de contact des deux plans tangents perpendiculaires à l'axe de révolution, croît donc graduellement jusqu'à une certaine limite à mesure que la ligne asymptotique considérée, d'abord tangente à l'un de ces parallèles, s'en éloigne en se rapprochant de l'axe, pour décroître de nouveau quand, après la traversée du parallèle de rayon minimum (dit *cercle de gorge*), elle s'écarte de l'axe en se rapprochant de l'autre cercle de contact; et ainsi de suite. Les lignes asymptotiques oscillent ainsi d'un cercle de contact à l'autre et couvrent la portion du tore comprise, du côté de l'axe, entre ces deux cercles, qui sont leur enveloppe commune sur la surface.

199*. — Théorème de Ch. Dupin, sur les lignes de courbure d'un système triple orthogonal de surfaces.

Un théorème aussi simple que remarquable, découvert au commencement de ce siècle par le géomètre français Charles Dupin, fait connaître immédiatement les lignes de courbure de toute surface appartenant à un *système triple orthogonal,* c'est-à-dire à trois familles associées de telle manière qu'il passe, par chacun de leurs points, une surface de chacune d'elles, et que ces trois surfaces y aient leurs plans tangents mutuellement rectangulaires. Il s'énonce en disant que *toute surface de l'une quelconque des trois familles est coupée par les surfaces des deux autres familles suivant ses propres lignes de courbure.*

Pour le démontrer, rapportons les surfaces à un système d'axes rectangles des x, y, z, et soient respectivement $\rho =$ const., $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. les équations des trois familles, ρ, ρ_1, ρ_2 désignant ainsi, tout à la fois, trois fonctions données de x, y, z et les paramètres caractéristiques des trois familles. Nous admettrons que, par chaque point (x, y, z) de l'espace ou, tout au moins, d'une certaine étendue à trois dimensions, il passe une surface de chaque famille que, pour abréger, nous appellerons la surface ρ, ou la surface ρ_1, ou la surface ρ_2. Nous savons (p. 59*) que les cosinus directeurs de la normale à la première seront les quotients, par le paramètre différentiel $\Delta_1\rho$, des

trois dérivées partielles en x, y, z de la fonction ρ, et que, de même, ceux des normales aux deux autres seront les rapports à $\Delta_1\rho_1$ et à $\Delta_1\rho_2$ des dérivées partielles premières de ρ_1 et de ρ_2. La condition de perpendicularité des deux surfaces ρ_1, ρ_2, exprimant l'égalité à zéro du cosinus de l'angle des deux normales correspondantes (somme des trois produits de leurs cosinus directeurs respectifs) sera donc, vu les valeurs généralement finies des paramètres différentiels $\Delta_1\rho_1$, $\Delta_1\rho_2$,

$$(1) \qquad \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}=0:$$

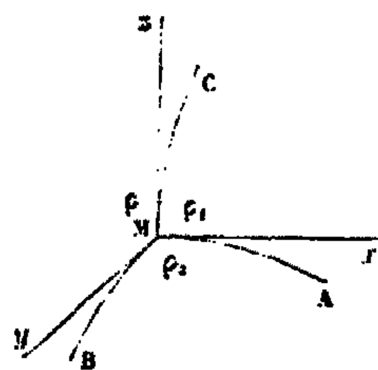
et elle devra, comme les deux conditions analogues concernant les normales aux surfaces ρ_2, ρ et aux surfaces ρ, ρ_1, être vérifiée identiquement, c'est-à-dire pour tous les systèmes possibles des valeurs de x, y, z qui correspondent à des points voisins du proposé. On peut donc la différentier, par exemple, en x, à cause de la continuité de variation que présenteront, d'un point à l'autre, les cosinus directeurs des normales, les paramètres Δ_1 de ρ, ρ_1, ρ_2 et, par suite, les dérivées premières de ces trois fonctions ρ, ρ_1, ρ_2. Il viendra

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d^2\rho_2}{dx^2}+\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d^2\rho_2}{dx\,dy}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d^2\rho_1}{dx\,dy}\\&\qquad+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d^2\rho_2}{dz\,dx}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d^2\rho_1}{dz\,dx}=0;\end{aligned}\right.$$

et des relations analogues à celle-là s'obtiendront en différentiant de même en y et z les deux autres conditions de perpendicularité.

Or admettons qu'on veuille considérer les sections principales des surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 en un point particulier quelconque M de l'espace; et, les formules précédentes subsistant quelle que soit l'orientation des axes coordonnés, choisissons, pour ceux-ci, les trois normales correspondantes Mx, My, Mz, qui sont les intersections, respectivement perpendiculaires aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, des plans tangents aux surfaces ρ_1 et ρ_2, ρ_2 et ρ, ρ et ρ_1, et qui, par conséquent, ne diffèrent pas des tangentes aux trois courbes respectives MA, MB, MC suivant lesquelles se coupent deux à deux ces trois surfaces. La fonction ρ, constante sur toute l'étendue de la première surface BC, aura pour dérivées premières, en M, d'une part, son paramètre différentiel $\Delta_1\rho$, dans le sens normal Mx, et, d'autre part, zéro dans les sens tangentiels My et

Fig. 36.



Mz. On aura donc, en M,

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dx} = \Delta_1\rho, \qquad \dfrac{d\rho}{d(y,z)} = 0; \\ \text{et, de même,} \\ \dfrac{d\rho_1}{dy} = \Delta_1\rho_1, \qquad \dfrac{d\rho_1}{d(z,x)} = 0; \qquad \dfrac{d\rho_2}{dz} = \Delta_1\rho_2, \qquad \dfrac{d\rho_2}{d(x,y)} = 0. \end{cases}$$

Grâce à ces valeurs des dérivées premières, la formule (2), et les deux autres analogues où ρ_2 et ρ, ρ et ρ_1 remplacent ρ_1 et ρ_2, deviennent, pour le point M, si on les divise respectivement par les produits $(\Delta_1\rho_1)(\Delta_1\rho_2)$, $(\Delta_1\rho_2)(\Delta_1\rho)$ et $(\Delta_1\rho)(\Delta_1\rho_1)$ différents, en général, de zéro,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_1\rho_1}\dfrac{d^2\rho_1}{dz\,dx} + \dfrac{1}{\Delta_1\rho_2}\dfrac{d^2\rho_2}{dx\,dy} = 0, \\ \dfrac{1}{\Delta_1\rho_2}\dfrac{d^2\rho_2}{dx\,dy} + \dfrac{1}{\Delta_1\rho}\dfrac{d^2\rho}{dy\,dz} = 0, \\ \dfrac{1}{\Delta_1\rho}\dfrac{d^2\rho}{dy\,dz} + \dfrac{1}{\Delta_1\rho_1}\dfrac{d^2\rho_1}{dz\,dx} = 0. \end{cases}$$

Ces trois relations, ajoutées, montrent que la somme des trois termes $\dfrac{1}{\Delta_1\rho}\dfrac{d^2\rho}{dy\,dz}$, $\dfrac{1}{\Delta_1\rho_1}\dfrac{d^2\rho_1}{dz\,dx}$, $\dfrac{1}{\Delta_1\rho_2}\dfrac{d^2\rho_2}{dx\,dy}$ égale zéro; et si, de cette somme nulle, on retranche successivement les premiers membres de (4), on verra que, $\Delta_1(\rho, \rho_1, \rho_2)$ n'étant pas infinis, ces équations (4) reviennent à poser

$$(5)\qquad (\text{au point M})\quad \frac{d^2\rho}{dy\,dz} = 0, \qquad \frac{d^2\rho_1}{dz\,dx} = 0, \qquad \frac{d^2\rho_2}{dx\,dy} = 0.$$

Or celles-ci expriment justement que My et Mz, Mz et Mx, Mx et My sont les tangentes principales, en M, des surfaces ρ, ρ_1, ρ_2. En effet, la première relation (5), par exemple, signifie que, dans les sens *respectifs* de My et de Mz, les deux dérivées premières $\dfrac{d\rho}{dz}$ et $\dfrac{d\rho}{dy}$ ont, en M, leurs propres dérivées égales à zéro. Donc ces deux dérivées premières, nulles en M, ne varient dans le voisinage, le long de My ou de Mz, que d'infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, et, par conséquent, les cosinus directeurs $\dfrac{1}{\Delta_1\rho}\dfrac{d\rho}{dz}$, $\dfrac{1}{\Delta_1\rho}\dfrac{d\rho}{dy}$ des normales à la surface ρ sont de cet ordre supérieur de petitesse en deux points pris, à une distance du premier ordre de M, dans les plans respectifs xMy, xMz ou, l'un, sur My, l'autre, sur Mz, à des écarts près du second ordre. C'est bien dire qu'il suffirait de changements de direction

négligeables à côté des angles de contingence, pour que ces deux normales devinssent respectivement perpendiculaires à Mz ou à My, et fussent contenues dans le plan xMy ou xMz mené par leur pied suivant la première normale Mx. Le théorème est donc démontré.

200*. — Toute surface, mais non toute famille de surfaces, fait partie d'un système triple orthogonal.

On déduit de là qu'une famille quelconque donnée $\rho =$ const. de surfaces n'est pas propre à faire partie d'un système triple orthogonal. Comme, sur toute surface qui coupera cette famille à angle droit, les lignes perpendiculaires aux intersections seront évidemment normales à la famille et appartiendront ainsi à la catégorie des courbes de l'espace menées *orthogonalement,* en partant de points quelconques, à travers toutes les surfaces $\rho =$ const., il est clair que des surfaces $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. rectangulaires à celles-ci $\rho =$ const. et entre elles ne pourront manquer, lorsque elles existeront, de se composer de pareilles *trajectoires orthogonales* à la famille proposée, obtenues, de proche en proche, en marchant normalement à toutes les surfaces $\rho =$ const. que l'on traverse, ou de manière que les différentielles dx, dy, dz des coordonnées y soient partout proportionnelles à $\frac{d\rho}{dx}, \frac{d\rho}{dy}, \frac{d\rho}{dz}$. Il faudra donc, pour construire les surfaces $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const., associer ensemble celles d'entre ces trajectoires orthogonales à la famille $\rho =$ const. qui partiront des divers points d'une même ligne de courbure d'une première surface considérée $\rho =$ const. Or, en général, il est infiniment peu probable que deux surfaces $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. ainsi obtenues, ou se coupant à angle droit au point de départ de leur intersection, continuent, d'elles-mêmes, à se couper aussi à angle droit tout le long de cette ligne. Donc la famille proposée $\rho =$ const. devra satisfaire à une certaine condition, ou la fonction ρ de x, y, z présenter dans sa forme quelque chose de particulier, pour qu'on puisse lui associer deux autres familles $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. la coupant et se coupant mutuellement à angle droit [1].

---

(1) M. Ossian Bonnet a démontré que la condition dont il s'agit revient à une certaine équation, fort compliquée, entre les dérivées partielles des trois premiers ordres de la fonction ρ.

Voici une manière simple, remarquée par M. G. Darboux, de le reconnaître. Imaginons d'abord que l'on forme, en fonction des dérivées premières et secondes de ρ, les expressions des cosinus directeurs, que j'appellerai K, L, M, des lignes de

Mais, si l'on donnait seulement une surface, dont j'appellerai ξ, η, ζ les coordonnées courantes et $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ l'équation, il suffirait de lui associer, d'abord, les surfaces *parallèles*, lieux des extrémités (x, y, z) de ses normales supposées menées, sur l'un ou l'autre de ses côtés, d'une même longueur arbitraire l, et puis les deux familles de surfaces développables formées par celles d'entre ces normales qui ont leurs pieds le long des lignes de courbure de la proposée, pour avoir un système triple orthogonal comprenant celle-ci. En effet, les coordonnées, x, y, z, de l'extrémité de la normale de longueur l menée en (ξ, η, ζ) à la surface $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, seront exprimées en fonction explicite de ξ, η, ζ, si $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ désignent les trois cosinus directeurs $\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{df}{d(\xi, \eta, \zeta)}$ de cette normale, par les trois formules

$$(6) \qquad x = \xi + l\cos\alpha, \qquad y = \eta + l\cos\beta, \qquad z = \zeta + l\cos\gamma;$$

---

courbure tracées sur les surfaces $\rho = \text{const.}$; cosinus évidemment proportionnels, d'après ce qu'on a vu p. 259*, à 1, y' et $p + qy'$, y' étant donné, en fonction de p, q, r, s, t et, par suite, des dérivées premières et secondes de ρ, par l'équation (21) de la p. 261*. Si les familles $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$ existent, les cosinus directeurs de leurs normales, proportionnels aux dérivées $\frac{d(\rho_1, \rho_2)}{d(x, y, z)}$, ne seront autres, d'après le théorème de Ch. Dupin, que K, L, M; et, par conséquent, en appelant φ l'une quelconque des deux fonctions ρ_1, ρ_2, ses trois dérivées en x, y, z égaleront les produits respectifs νK, νL, νM de K, L, M par un certain facteur commun variable ν. Or il suit de là que les expressions $\frac{d.\nu L}{dz}$ et $\frac{d.\nu M}{dy}$, $\frac{d.\nu M}{dx}$ et $\frac{d.\nu K}{dz}$, $\frac{d.\nu K}{dy}$ et $\frac{d.\nu L}{dx}$ sont respectivement égales deux à deux, comme représentant sous des formes différentes les dérivées secondes *obliques* de φ en y et z, z et x, x et y; et que l'on a, par conséquent,

$$K\left(\frac{d.\nu L}{dz} - \frac{d.\nu M}{dy}\right) + L\left(\frac{d.\nu M}{dx} - \frac{d.\nu K}{dz}\right) + M\left(\frac{d.\nu K}{dy} - \frac{d.\nu L}{dx}\right) = 0,$$

ou bien, en développant les dérivées de produits, puis réduisant et divisant par ν,

$$K\left(\frac{dL}{dz} - \frac{dM}{dy}\right) + L\left(\frac{dM}{dx} - \frac{dK}{dz}\right) + M\left(\frac{dK}{dy} - \frac{dL}{dx}\right) = 0.$$

C'est l'équation cherchée, où la différentiation de K, L, M introduira linéairement les dérivées troisièmes de ρ.

Elle garderait évidemment la même forme, si K, L, M désignaient non pas les cosinus directeurs des tangentes principales aux surfaces $\rho = \text{const.}$, mais seulement trois expressions proportionnelles à ces cosinus (comme, par exemple, 1, y' et $p + qy'$); car les rapports, à ces expressions, des trois dérivées de φ en x, y, z, seraient encore un même facteur ν.

et l'élimination de ξ, η, ζ entre celles-ci et l'équation $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ donnera l'équation de la famille des surfaces dites *parallèles* à la proposée. Or il est aisé de voir que ces surfaces auront leurs normales communes. Car, en faisant, sur l'une d'elles, varier x, y, z des accroissements dx, dy, dz que provoquent trois changements élémentaires $d\xi, d\eta, d\zeta$ de ξ, η, ζ, il résultera, des formules (6),

$$(7)\quad dx = d\xi + l\,d\cos\alpha, \qquad dy = d\eta + l\,d\cos\beta, \qquad dz = d\zeta + l\,d\cos\gamma,$$

et, par suite, vu la relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ qu'on peut différentier,

$$(8)\quad \cos\alpha.dx + \cos\beta.dy + \cos\gamma.dz = \cos\alpha.d\xi + \cos\beta.d\eta + \cos\gamma.d\zeta,$$

égalité dont les deux membres expriment les projections, sur la normale l définie par les cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, des deux éléments rectilignes issus respectivement de ses deux extrémités et qui ont pour projections sur les axes, l'un, dx, dy, dz, l'autre, $d\xi, d\eta, d\zeta$. Le second membre, projection d'un élément perpendiculaire à la droite l, étant nul, il en est de même du premier; ce qui implique bien la normalité de cette droite l aux éléments rectilignes contigus situés sur le lieu des points (x, y, z) et, par suite, à ce lieu lui-même. Toutes les surfaces déduites de la proposée $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ en donnant successivement à l une infinité de valeurs, ont donc normales communes, et sont coupées à angle droit par les deux familles de normalies développables, déjà rectangulaires entre elles, que forment ensemble ces droites.

201*. — Toute surface appartient même à une infinité de systèmes triples orthogonaux; transformations stéréographiques ou par rayons vecteurs réciproques.

Une certaine manière, dite *transformation par rayons vecteurs réciproques*, de déduire d'une figure d'autres figures qui lui correspondent point par point, permet même, après ce qui précède, de construire une infinité de systèmes triples orthogonaux comprenant une surface quelconque $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. La transformation dont il s'agit consiste à tirer, d'un point fixe donné que nous supposerons pris pour origine, des droites r, dites *rayons vecteurs*, aboutissant aux divers points (x, y, z) de la figure proposée, et à transporter ces points, le long de leurs rayons vecteurs respectifs (prolongés s'il le faut), à des distances du point fixe inversement proportionnelles à ces rayons mêmes, ou qui égalent les quotients, par r, d'un carré constant arbi-

traire k^2. Les points (x, y, z), ayant ainsi acquis par leur déplacement des rayons vecteurs, r', réciproques des premiers r, et des coordonnées que j'appellerai x', y', z', formeront une nouvelle figure, dite la *transformée* de la première par rayons vecteurs réciproques. Chacune des deux sera évidemment la transformée de l'autre et aura ses parties éloignées en correspondance avec les parties de l'autre contiguës à l'origine; de sorte que la transformation dont il s'agit amplifiera sans mesure les régions de l'espace avoisinant cette origine, mais rapetissera de même sans mesure les régions fort éloignées.

L'identité de direction de r' et de r, impliquant l'égalité de leurs cosinus directeurs $\frac{(x', y', z')}{r'}$ et $\frac{(x, y, z)}{r}$, donne la suite de rapports égaux $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}$; et, si l'on observe que $\frac{r'}{r}$ égale soit $\frac{k^2}{r^2}$ ou $\frac{k^2}{x^2+y^2+z^2}$, soit $\frac{r'^2}{k^2}$ ou $\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{k^2}$, on aura, pour passer de x, y, z à x', y', z' ou *vice versa*, les six formules de transformation

$$(9)\qquad (x', y', z') = \frac{k^2(x, y, z)}{x^2+y^2+z^2}, \qquad (x, y, z) = \frac{k^2(x', y', z')}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Les trois dernières (9) montrent, par exemple, que toute sphère, représentée par une équation de la forme $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2$ ou

$$(10)\qquad (x^2+y^2+z^2) - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \text{une const. } c,$$

se transforme en une surface ayant pour équation, après qu'on a multiplié par $x'^2+y'^2+z'^2$ et transposé certains termes,

$$(11)\qquad c(x'^2+y'^2+z'^2) + 2k^2(\alpha x' + \beta y' + \gamma z') = k^4.$$

On voit que cette surface est une autre sphère, se réduisant même à un plan quand $c = 0$, c'est-à-dire quand la proposée (10) passe par l'origine et a ainsi des parties, transportées à l'infini ou agrandies infiniment par la transformation, qui ne peuvent plus appartenir à une sphère d'un rayon limité.

A l'inverse, tout plan donné, que représentera l'équation (11) en posant $c = 0$ et attribuant à α, β, γ des valeurs convenables, se plie dans la transformation, autour de sa normale abaissée de l'origine, en une sphère (10), et vient finalement se fermer à cette origine.

Par suite, tout cercle ou toute droite, étant l'intersection de deux sphères ou de deux plans, devient, dans la même transformation par rayons vecteurs réciproques, l'intersection des deux sphères transformées (de rayons finis ou infinis), et se change ainsi en une droite

ou un cercle suivant que la ligne proposée passe ou non par l'origine.

Cherchons encore dans quel rapport est modifiée par la transformation la distance δ de deux points, dont les deux rayons vecteurs, faisant un angle donné V, s'appelleront r, ι avant la transformation et r', ι' après. Si δ' désigne leur nouvelle distance, les deux triangles dont les côtés sont r, ι, δ et r', ι', δ' donneront

$$\delta^2 = r^2 + \iota^2 - 2r\iota\cos V, \qquad \delta'^2 = r'^2 + \iota'^2 - 2r'\iota'\cos V;$$

et, en remplaçant r', ι' par leurs valeurs $\frac{k^2}{r}$, $\frac{k^2}{\iota}$, puis k^4 par $rr'\iota\iota'$,

$$\delta'^2 = \frac{k^4}{r^2} + \frac{k^4}{\iota^2} - \frac{2k^4\cos V}{r\iota} = \frac{k^4}{r^2\iota^2}\delta^2 = \frac{r'\iota'}{r\iota}\delta^2.$$

Il vient donc

$$\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^2 = \frac{r'}{r}\,\frac{\iota'}{\iota}; \tag{12}$$

et *le rapport de la nouvelle distance des deux points à leur distance primitive est moyen proportionnel entre les deux rapports respectifs de leurs nouveaux rayons vecteurs aux anciens.*

Il suit de là que tous les points d'une même région de l'espace infiniment petite suivant les divers sens (relativement à sa distance à l'origine), ou qui ont leurs rayons vecteurs altérés par la transformation dans un rapport à fort peu près le même, auront aussi leurs distances mutuelles changées dans ce rapport constant et, par conséquent, formeront, joints trois par trois, des triangles dont la forme se conservera. Donc tous ces points garderont leurs distances angulaires, prises de quelques-uns d'entre eux choisis à volonté comme centres : ceux qui, par exemple, seront à *un angle droit* de distance d'un autre ne cesseront pas de l'être; d'où il résulte qu'un plan, lieu des directions perpendiculaires, à partir d'un centre donné sur sa superficie, à une même droite, conservera sa nature ou sa forme; que l'angle rectiligne d'un dièdre ne perdra pas ce rôle ou restera normal à l'arête; etc. Par suite, les parties planes des petites figures, leurs angles dièdres, etc., garderont leur configuration. En particulier, l'angle de deux courbes quelconques issues d'un même point égalera celui sous lequel se couperont les transformées de ces courbes. Mais, comme, dans un polyèdre infiniment petit, une arête située, par rapport à l'origine, au delà d'une face, se trouvera en deçà après la transformation, les angles trièdres se changeront en leurs symétriques, si du moins la constante k^2 des formules (9) est positive; et toute figure infiniment petite à trois dimensions aura sa forme transformée en celle de sa symétrique.

Supposons que l'origine soit occupée par l'œil d'un observateur, regardant une figure quelconque tracée sur une surface transparente, et qu'un tableau également transparent s'étende suivant la transformée de cette surface. Il est clair que les divers détails de la figure seront vus sur ce tableau aux endroits mêmes où le perceront les rayons visuels ou vecteurs correspondants, et que, par suite, la figure transformée point par point de la proposée en constituera la *perspective*, c'est-à-dire sera un dessin produisant sur l'œil la même impression qu'elle. Or, dans le cas simple où la surface donnée est une sphère qui vient toucher l'œil de l'observateur, le tableau se réduit au plan transformé de la sphère; et il suffit de choisir le carré constant k^2 de manière à faire passer ce plan par le centre de celle-ci pour avoir, de la demi-sphère la plus éloignée de l'œil ou qui se transformera en son cercle de base, la projection, dite *stéréographique*, employée pour les mappemondes, et dont on attribue la découverte à Ptolémée. La transformation par rayons vecteurs réciproques n'est donc qu'une extension naturelle de la projection de Ptolémée, une extension où se conservent toutes les propriétés essentielles de l'idée généralisée. Aussi devrait-on peut-être l'appeler simplement la *transformation stéréographique;* ce qui aurait, d'ailleurs, le mérite d'abréger le langage.

Revenons maintenant à la considération d'un système triple orthogonal quelconque de surfaces, et supposons qu'on en prenne le transformé par rayons vecteurs réciproques. Celui-ci sera un nouveau système triple orthogonal, puisque la transformation dont il s'agit n'altère pas les angles formés par des éléments rectilignes ou plans quelconques. Et l'on aura ainsi, en déplaçant l'origine, une infinité de systèmes triples orthogonaux transformés d'un seul, sans compter ceux, d'une construction évidente, qui leur sont simplement semblables ou symétriques, et que l'on obtient en laissant l'origine fixe, mais en faisant varier tous les x', y', z' dans un même rapport par un changement de grandeur ou de signe de la constante k^2.

Cela posé, il est facile de voir qu'une même surface fait toujours partie d'une infinité de systèmes triples orthogonaux distincts. Construisons la transformée de cette surface par rayons vecteurs réciproques, après avoir placé l'origine sur une quelconque de ses normales, et associons à cette transformée ses parallèles, puis les deux familles de surfaces développables lieux de leurs normales, surfaces formant avec les précédentes un système triple orthogonal; et construisons enfin de celui-ci le transformé stéréographique, où les génératrices des surfaces développables seront changées en arcs de cercle.

Nous aurons de la sorte un système triple orthogonal comprenant évidemment la surface donnée et où la normale quelconque sur laquelle aura été prise l'origine, se trouvant à elle-même sa propre transformée, coupera perpendiculairement, non seulement cette surface, mais aussi, vu la conservation des angles, sa transformée et, par suite, les parallèles à cette transformée avec leurs propres transformées. Ainsi, dans le système triple orthogonal obtenu, où les trajectoires normales à la famille dont fait partie la surface proposée sont généralement des arcs de cercle, l'une de ces trajectoires se réduit à une ligne droite, savoir, celle qui émane du point de la surface où aboutit un rayon vecteur r normal à celle-ci.

En changeant ce point d'une manière continue par un déplacement de l'origine, on aura donc un système triple constamment orthogonal, où tout se déformera sans cesse à l'exception de la surface donnée. Et encore n'obtiendra-t-on là, évidemment, qu'une certaine catégorie des systèmes triples orthogonaux dont on conçoit que puisse faire partie cette surface, puisque les trajectoires orthogonales de la famille qui la comprend y sont astreintes à présenter la forme circulaire, la plus particulière de toutes après la forme rectiligne, à laquelle ne correspondait que le système triple orthogonal formé par une famille de surfaces parallèles et par les deux familles de développables lieux de leurs normales.

Malheureusement, en dehors de ces catégories restreintes, on ne connaît que bien peu d'exemples de systèmes triples orthogonaux : je parlerai bientôt du plus remarquable d'entre eux, découvert par Ch. Dupin, et que forment ensemble toutes les surfaces du second degré dont les trois sections principales ont leurs foyers aux mêmes points de l'espace.

202*. — Autres propriétés importantes de la transformation stéréographique.

Mais il sera bon de voir auparavant quelques propriétés, utiles en Physique mathématique, de la transformation par rayons vecteurs réciproques appliquée aux fonctions de point. Une telle fonction, f, d'une coordonnée x, ou de deux coordonnées rectangulaires x et y, ou de trois coordonnées rectangulaires x, y et z, étant donnée soit tout le long d'un axe des x, soit aux divers points (x, y) d'un plan des xy, soit enfin dans un espace à trois dimensions x, y et z, sa transformée par rayons vecteurs réciproques sera la nouvelle fonction de point obtenue en supposant les diverses valeurs de f transportées,

c'est-à-dire réalisées, aux endroits (x'), ou (x', y'), ou (x', y', z'), qui sont les transformés stéréographiques de ceux, (x), (x, y) ou (x, y, z), de l'axe des x, du plan des xy, ou de l'espace *solide*. Son expression, que j'appellerai $\varphi(x')$, ou $\varphi(x', y')$, ou $\varphi(x', y', z')$, résultera évidemment de la substitution, dans $f(x)$, $f(x, y)$ ou $f(x, y, z)$, des valeurs (9) de $x, y, \ldots$, qu'on pourra écrire, quel que soit le nombre n (égal à 1, 2 ou 3) de ces coordonnées,

$$(13) \qquad (x, y, \ldots) = \frac{k^2}{r'^2}(x', y', \ldots), \qquad \text{où} \qquad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \ldots}.$$

Les familles de points, de lignes ou de surfaces que définit l'équation $f =$ un paramètre c, auront pour transformées les figures de même espèce représentées par $\varphi = f = c$; et leurs trajectoires orthogonales, composées de chemins infiniment petits ds joignant chacune de ces figures $f = c$ à la suivante $f = c + dc$, deviendront, élément par élément, à cause de la conservation des angles, les trajectoires orthogonales aux figures transformées $\varphi = c$. Cela posé, aux extrémités, où f reçoit les deux valeurs respectives c, $c + dc$, d'un élément quelconque ds des premières trajectoires orthogonales, correspondront les deux extrémités d'un élément ds' des nouvelles, où φ aura également les valeurs c, $c + dc$; de sorte que, si dc est pris positif, les deux paramètres différentiels du premier ordre $\Delta_1 f$, $\Delta_1 \varphi$ des deux fonctions, en deux points correspondants, seront, comme on sait, $\frac{dc}{ds}$ et $\frac{dc}{ds'}$. Or la formule (12) [p. 277*], appliquée en y posant $\delta = ds$, $\delta' = ds'$, avec $\frac{\iota'}{\iota} = \frac{r'}{r}$ puisqu'il s'agit de lignes infiniment petites, donnera $\frac{r}{ds} = \frac{r'}{ds'}$, et, par suite, $r\frac{dc}{ds} = r'\frac{dc}{ds'}$, ou bien

$$(14) \qquad r\Delta_1 f = r'\Delta_1 \varphi.$$

Il existe donc une relation très simple entre le paramètre différentiel du premier ordre d'une fonction de point et celui de sa transformée stéréographique.

Voyons comment on obtiendrait cette relation par la voie analytique, en rappelant que les expressions respectives de $(\Delta_1 f)^2$ et $(\Delta_1 \varphi)^2$ sont

$$(15) \qquad (\Delta_1 f)^2 = \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \ldots, \qquad (\Delta_1 \varphi)^2 = \frac{d\varphi^2}{dx'^2} + \frac{d\varphi^2}{dy'^2} + \ldots.$$

Les formules inverses de (13) étant

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x', y', \dots) = \frac{k^2}{r^2}(x, y, \dots),\\ &\text{avec}\\ &r = \sqrt{x^2 + y^2 + \dots} \quad \text{et} \quad \frac{dr}{d(x, y, \dots)} = \frac{(x, y, \dots)}{r},\end{aligned}\right.$$

on trouve de suite, pour les dérivées partielles en x, par exemple, des nouvelles coordonnées x', y', ..., les valeurs

$$\frac{d(x', y', \dots)}{dx} = \frac{k^2}{r^2}\left(1 - 2\frac{x^2}{r^2}, \ -2\frac{xy}{r^2}, \dots\right) = \frac{r'^2}{k^2}\left(1 - 2\frac{x'^2}{r'^2}, \ -2\frac{x'y'}{r'^2}, \dots\right);$$

et il en résulte que les dérivées partielles d'une fonction f pour le point $(x, y, \dots)$ s'expriment, au moyen de celles de la fonction égale φ pour le point $(x', y', \dots)$, par des formules symboliques

$$\frac{d}{d(x, y, \dots)} = \frac{dx'}{d(x, y, \dots)}\frac{d}{dx'} + \frac{dy'}{d(x, y, \dots)}\frac{d}{dy'} + \dots,$$

qui deviennent aisément

$$(17)\quad \frac{d}{d(x, y, \dots)} = \frac{1}{k^2}\left[r'^2 \frac{d}{d(x', y', \dots)} - 2(x', y', \dots)\left(x'\frac{d}{dx'} + y'\frac{d}{dy'} + \dots\right)\right].$$

Or, en mettant, à la suite des symboles d des numérateurs, f au premier membre et φ au second, puis élevant au carré les relations ainsi obtenues et ajoutant, il viendra

$$(18)\qquad \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \dots = \frac{r'^4}{k^4}\left(\frac{d\varphi^2}{dx'^2} + \frac{d\varphi^2}{dy'^2} + \dots\right),$$

vu que les autres termes des seconds membres seront, abstraction faite du dénominateur k^4,

$$\begin{aligned} &-4r'^2(x', y', \dots)\frac{d\varphi}{d(x', y', \dots)}\left(x'\frac{d\varphi}{dx'} + y'\frac{d\varphi}{dy'} + \dots\right)\\ &+ 4(x'^2, y'^2, \dots)\left(x'\frac{d\varphi}{dx'} + y'\frac{d\varphi}{dy'} + \dots\right)^2,\end{aligned}$$

et auront leur somme

$$-4(r'^2 - x'^2 - y'^2 - \dots)\left(x'\frac{d\varphi}{dx'} + y'\frac{d\varphi}{dy'} + \dots\right)^2,$$

identiquement nulle. Enfin la multiplication de (18) par r^2, suivie de l'extraction de la racine carrée des deux membres en valeur absolue et de la substitution de rr' à k^2, conduira bien à la relation (14).

La simplicité de cette formule (14) invite à chercher une relation analogue pour les paramètres différentiels du second ordre, si importants en Physique mathématique,

$$\Delta_2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \dots, \qquad \Delta_2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx'^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy'^2} + \dots.$$

A cet effet, il faudra, à la suite des symboles d des numérateurs, inscrire, dans les premiers membres de (17), les dérivées de f en x, y, ... et, dans les seconds membres, leurs valeurs en φ, x', y', ... qui viennent d'être formées, en observant d'ailleurs, dans les différentiations de produits, que les dérivées en x', y', ... de r'^2 sont $2(x', y', \dots)$. L'expression de $\frac{d^2 f}{dx^2}$, par exemple, se composera : 1° d'une partie, qu'on peut écrire symboliquement

$$(19) \qquad \frac{1}{k^4}\left[r'^2 \frac{d}{dx'} - 2x'\left(x'\frac{d}{dx'} + y'\frac{d}{dy'} + \dots\right)\right]^2 \varphi,$$

où figureront dans tous les termes les dérivées secondes de φ, et qui s'obtiendra en traitant, dans l'expression de la dérivée première de f en x, les facteurs r'^2, x', y', ... comme des constantes; 2° d'une autre partie où, au contraire, les dérivées premières de φ seront assimilées à des facteurs constants, tandis que les différentiations en x', y', ... se feront sur les facteurs r'^2, x', y', ... Le calcul de cette seconde partie donne, après quelques réductions immédiates,

$$(20) \qquad -2\,\frac{r'^2 - 4x'^2}{k^4}\left(x'\frac{d\varphi}{dx'} + y'\frac{d\varphi}{dy'} + \dots\right) - 4\,\frac{r'^2}{k^4}\,x'\,\frac{d\varphi}{dx'}.$$

Or la somme de l'expression (19), développée, et des $n-1$ analogues, obtenues pour les dérivées secondes de f en y, ..., présente évidemment les réductions rencontrées tout à l'heure dans le calcul de $(\Delta_1 f)^2$; et le résultat est le second membre même de (18) pris symboliquement, c'est-à-dire en y entendant les carrés des dérivées premières de φ dans le sens de dérivées secondes. Cette somme vaut donc $\frac{r'^4}{k^4}\Delta_2\varphi$. Quant à la somme de l'expression (20) et des $n-1$ pareilles en y', ..., elle est évidemment $2\,\frac{(2-n)r'^2}{k^4}\left(x'\frac{d\varphi}{dx'} + y'\frac{d\varphi}{dy'} + \dots\right)$. Ainsi la valeur de $\Delta_2 f$ exprimée au moyen de φ sera

$$(21) \qquad \Delta_2 f = \frac{r'^4}{k^4}\left[\Delta_2\varphi + 2\,\frac{2-n}{r'^2}\left(x'\frac{d\varphi}{dx'} + y'\frac{d\varphi}{dy'} + \dots\right)\right].$$

Dans le cas, $n=2$, d'une fonction $f(x, y)$ ou $\varphi(x', y')$ de deux coor-

données seulement, elle a le même degré de simplicité que celle, (18), de $(\Delta_1 f)^2$, et, en multipliant par r^2, puis remplaçant k^4 par $r^2 r'^2$, il vient

$$(22) \qquad r^2 \Delta_2 f(x, y) = r'^2 \Delta_2 \varphi(x', y').$$

Mais, si n diffère de 2 et que, par suite, il n'y ait plus de rapport simple entre $\Delta_2 f$ et $\Delta_2 \varphi$, on comparera le second membre de (21) à $\Delta_2(\varphi r'^m)$, en se réservant de déterminer l'exposant constant m de manière à simplifier, autant que possible, le résultat de cette comparaison. Les dérivées de r' en $x', y', \ldots$ étant les quotients par r' de $x', y', \ldots$, on trouve, par exemple,

$$\frac{d(\varphi r'^m)}{dx'} = r'^m \frac{d\varphi}{dx'} + m r'^{m-2} x' \varphi,$$

$$\frac{d^2(\varphi r'^m)}{dx'^2} = r'^m \frac{d^2\varphi}{dx'^2} + 2 m r'^{m-2} x' \frac{d\varphi}{dx'} + m[r'^{m-2} + (m-2) r'^{m-4} x'^2]\varphi,$$

et ensuite

$$(23) \quad \Delta_2(\varphi r'^m) = r'^m \left[\Delta_2 \varphi + 2 \frac{m}{r'^2}\left(x' \frac{d\varphi}{dx'} + y' \frac{d\varphi}{dy'} + \ldots\right) + m \frac{n+m-2}{r'^2} \varphi\right].$$

Or les quantités entre crochets, dans les seconds membres de (21) et (23), seront identiques si l'on prend $m = 2 - n$; et alors le rapport de $\Delta_2 f$ à $\Delta_2(\varphi r'^{2-n})$ sera celui de r'^{n+2} à $k^4 = r^2 r'^2$, c'est-à-dire celui de r'^n à r^2. La relation (21), multipliée par r^2, revient donc à poser

$$(24) \qquad r^2 \Delta_2 f = r'^n \Delta_2(\varphi r'^{2-n}).$$

C'est la formule générale cherchée, comprenant la précédente (22). Elle sera surtout utile, en Physique mathématique, quand on saura former une fonction de point dont le paramètre Δ_2 soit nul dans un certain espace à une, deux ou trois dimensions, et dont la valeur ou la dérivée suivant la normale, aux différents points de la limite de cet espace, puissent être choisies à volonté; car, donnant alors $\Delta_2(\varphi r'^{2-n}) = 0$, elle fera connaître de suite une infinité d'autres fonctions de point, $\varphi r'^{2-n}$, qui auront également leur paramètre Δ_2 nul dans les espaces respectifs transformés stéréographiques du proposé et leur valeur ou leur dérivée dans le sens normal arbitraires aux limites de ces espaces.

La fonction de point la plus simple dont le paramètre Δ_2 s'annule partout est évidemment f ou $\varphi =$ une const. c; et son introduction dans la relation (24), pour le cas particulièrement important, $n = 3$, d'un espace à trois dimensions, donne, en divisant par cr'^3, $0 = \Delta_2(r'^{-1})$. Ainsi, l'inverse de la distance des divers points de l'espace à une

même origine quelconque est une fonction ayant son paramètre différentiel du second ordre identiquement nul. Ce fait analytique, qu'on vérifie, du reste, immédiatement en faisant la somme des trois dérivées secondes directes de l'expression $r^{-1} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, contient en germe, comme on le verra dans le Calcul intégral, une belle et féconde propriété de certaines fonctions appelées *potentiels*.

203*. — Système triple orthogonal formé par les surfaces du second degré homofocales.

On sait que les deux familles de courbes formées dans un plan par les hyperboles et les ellipses ayant mêmes foyers se coupent partout orthogonalement; car la bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs menés à un même point quelconque du plan est à la fois normale à l'ellipse et tangente à l'hyperbole qui passent par ce point. Or, comme ces courbes, rapportées à leurs axes communs de symétrie, ont pour équation générale $\frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho - \alpha} = 1$, avec α constant et ρ seul variable d'une courbe à l'autre, on peut, en introduisant dans cette équation un terme analogue au second, affecté d'une troisième coordonnée z au lieu de y et d'une constante β au lieu de α, se demander si les familles de surfaces ainsi exprimées par la relation

$$(25) \qquad \frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho - \alpha} + \frac{z^2}{\rho - \beta} = 1,$$

ne se couperaient pas de même à angle droit dans tout l'espace. C'est ce qu'a effectivement reconnu Ch. Dupin au commencement de ce siècle.

Mais voyons d'abord quelles surfaces représente cette équation (25), où ρ est un paramètre variable. Les différences entre les trois dénominateurs ρ, $\rho - \alpha$, $\rho - \beta$ étant constantes, elle exprime toutes les surfaces du second degré homofocales, c'est-à-dire dont les trois sections principales, situées dans de mêmes plans choisis comme plans coordonnés, ont leurs foyers communs. Un choix convenable des axes des x, y, z nous permettra de prendre $\rho > \rho - \alpha > \rho - \beta$, ou de supposer α supérieur à zéro et β plus grand que α. D'ailleurs, comme des valeurs négatives de ρ rendraient le premier membre de (25), en tous les points *réels* (x, y, z) de l'espace, essentiellement négatif et, par suite, inférieur au second membre 1, toutes les surfaces réelles que représente (25) s'obtiendront en donnant à ρ les valeurs comprises soit entre zéro et α, soit entre α et β, soit entre β et ∞. Il

en résulte : 1°, dans le premier intervalle (où $\rho-\alpha$, $\rho-\beta$ sont négatifs), des surfaces chez lesquelles le premier terme de (25) et la coordonnée x ne peuvent pas se réduire à zéro, c'est-à-dire des hyperboloïdes à deux nappes ayant pour axe transverse l'axe des x; 2°, dans le deuxième intervalle (où $\rho-\beta$ est négatif), des surfaces où il arrive bien aux deux premiers termes de (25), c'est-à-dire à x et à y, de s'annuler, mais pas à la fois, surfaces qui sont des hyperboloïdes à une nappe ayant l'axe des z pour axe non transverse; 3° enfin, dans le troisième intervalle, où chaque terme du premier membre se trouve essentiellement positif et au plus égal à la valeur 1 du second membre, des surfaces en tous les points desquelles x^2, y^2, z^2 ne dépassent pas certaines valeurs, c'est-à-dire des ellipsoïdes.

Il est aisé de voir que, par un point quelconque donné (x, y, z) de l'espace, on peut mener une surface de chaque espèce et une seule. En effet, l'équation (25), où x, y, z seront ainsi connus et où il faudra chercher ρ, aura son premier membre, dans chacun des trois intervalles, fonction continue et décroissante de ρ; car, à mesure que ρ y variera de zéro à α, ou de α à β, ou de β à ∞, les dénominateurs positifs y grandiront et les dénominateurs négatifs s'y rapprocheront de zéro, ce qui fera sans cesse décroître les termes positifs et croître en valeur absolue les termes négatifs : et comme, au commencement de chaque intervalle, l'un des trois dénominateurs ρ, $\rho-\alpha$, $\rho-\beta$, devenu récemment positif, sera très voisin de zéro et rendra tout le premier membre infini positif, tandis que la fin du même intervalle sera marquée par une valeur infiniment petite négative du dénominateur suivant, s'il y en a un, valeur rendant tout le premier membre infini négatif, ou sera marquée, dans le cas contraire, par la valeur $\rho=\infty$ qui annule tout le premier membre, celui-ci passera bien, dans chaque intervalle, une fois et une seule, par la valeur 1 du second membre. Ainsi, l'équation (25) admettra trois racines, caractéristiques respectivement d'un hyperboloïde à deux nappes, d'un hyperboloïde à une nappe et d'un ellipsoïde, conduits par le point donné (x, y, z) : elle représente bien, à elle seule, un système triple de surfaces se coupant partout trois par trois, une de chaque système ou famille.

Démontrons maintenant que ce système triple est orthogonal, ou que les deux surfaces qui correspondent, pour le point donné (x, y, z), à deux quelconques ρ_1, ρ_2 des trois racines de l'équation (25), ont leurs normales en ce point mutuellement rectangulaires. Les cosinus directeurs de ces normales se trouvent, comme on sait (p. 59*), proportionnels aux trois dérivées en x, y, z des premiers membres des

équations des surfaces mises sous la forme $F(x, y, z) = 0$ ou devenues, d'après (25),

$$(26)\qquad \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_1 - \alpha} + \frac{z^2}{\rho_1 - \beta} - 1 = 0, \qquad \frac{x^2}{\rho_2} + \frac{y^2}{\rho_2 - \alpha} + \frac{z^2}{\rho_2 - \beta} - 1 = 0,$$

dérivées dont les moitiés sont respectivement

$$\frac{x}{\rho_1}, \quad \frac{y}{\rho_1 - \alpha}, \quad \frac{z}{\rho_1 - \beta} \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{\rho_2}, \quad \frac{y}{\rho_2 - \alpha}, \quad \frac{z}{\rho_2 - \beta}.$$

Le cosinus de l'angle des deux normales, proportionnel à la somme des trois produits deux à deux de ces quantités, sera donc nul si l'on a

$$(27)\qquad \frac{x}{\rho_1}\frac{x}{\rho_2} + \frac{y}{\rho_1 - \alpha}\frac{y}{\rho_2 - \alpha} + \frac{z}{\rho_1 - \beta}\frac{z}{\rho_2 - \beta} = 0.$$

Or il en est bien ainsi; car la première relation (26), changée de signes et ajoutée ensuite terme à terme à la seconde, donne précisément, en divisant le résultat par le facteur commun $\rho_1 - \rho_2$ différent de zéro, cette condition de rectangularité (27).

204*. — Lignes de courbure des surfaces du second degré.

Toute surface du second degré à centre (et même par suite, comme cas *limite*, tout paraboloïde, c'est-à-dire toute surface du second degré dépourvue de centre ou dont le centre s'est transporté à l'infini) a son équation par rapport à ses axes évidemment comprise dans la précédente (25), pourvu que l'on attribue à α et β certaines valeurs, celles qui, au moment où ρ atteindra une grandeur appropriée, rendront ρ, $\rho - \alpha$, $\rho - \beta$ identiques aux carrés, pris avec signes convenables, de ses demi-axes. Il suffira donc de lui associer ses homofocales, représentées par la même équation où α et β seront ainsi connus, pour avoir un système triple orthogonal dont elle fera partie; et alors, d'après le théorème de Ch. Dupin, les deux familles auxquelles elle n'appartiendra pas la couperont respectivement suivant ses deux systèmes de lignes de courbure. Celles-ci se trouveront, en conséquence, parfaitement déterminées.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un ellipsoïde, dont nous appellerons respectivement a, b, c le demi-grand axe, le demi-axe moyen et le demi-petit axe. Pour que, dans (25) où ρ prend successivement toutes les valeurs positives, on ait à un certain moment $\rho = a^2$, $\rho - \alpha = b^2$, $\rho - \beta = c^2$, il suffira évidemment de poser $\alpha = a^2 - b^2$, $\beta = a^2 - c^2$; et, si l'on appelle alors ρ_1 toutes les valeurs possibles de ρ comprises entre zéro et α, ou donnant des hyperbo-

loïdes à deux nappes, ρ_2 les valeurs analogues comprises entre α et β ou donnant des hyperboloïdes à une nappe, l'ellipsoïde proposé, dont l'équation continue à être (25) avec $\rho = a^2 > \beta$, aura comme lignes de courbure ses intersections par les hyperboloïdes

$$(28) \qquad \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_1 - \alpha} + \frac{z^2}{\rho_1 - \beta} = 1, \qquad \frac{x^2}{\rho_2} + \frac{y^2}{\rho_2 - \alpha} + \frac{z^2}{\rho_2 - \beta} = 1.$$

En éliminant un des trois carrés x^2, y^2, z^2 entre (25) et celle des deux relations (28) que l'on voudra considérer, il viendra, pour représenter la projection des lignes de courbure correspondantes sur le plan des yz, ou sur celui des zx, ou sur celui des xy, une équation évidemment du premier degré par rapport aux deux autres carrés et qui exprimera des ellipses ou des hyperboles. On voit donc que les lignes de courbure d'une surface du second degré se projettent sur un quelconque de ses plans principaux suivant des coniques symétriques par rapport aux axes qu'elle a dans ce plan.

205*. — Des coordonnées elliptiques et, en général, des coordonnées curvilignes.

Si, vu la symétrie des surfaces précédentes de part et d'autre des plans coordonnés, on se borne à considérer l'espace compris, par exemple, dans l'angle trièdre des x, y et z positifs, chaque point (x, y, z) de cet espace sera défini dès que l'on donnera les paramètres respectifs ρ, ρ_1 et ρ_2 des trois surfaces (25) et (26) qui y passeront; car les trois équations distinctes (25) et (26) détermineront les carrés x^2, y^2, z^2, qui y figurent seulement au premier degré, et l'on en déduira les valeurs absolues de x, y, z. Il reviendra donc au même de se donner x, y, z ou les trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2. Et si l'on se meut, en particulier, sur la surface d'un même ellipsoïde ρ, les divers points successivement atteints seront distingués les uns des autres au moyen des paramètres ρ_1, ρ_2 des deux lignes de courbure qui s'y couperont. Ces deux variables ρ_1, ρ_2, qui définiront les divers points de l'ellipsoïde et qui, égalées à des constantes, représenteront des courbes de la surface se croisant partout à angle droit, seront donc les analogues de deux coordonnées rectangles ordinaires x, y d'un plan, lesquelles, égalées à des constantes, expriment des droites orientées suivant deux directions rectangulaires : aussi Lamé les a-t-il de même appelées des *coordonnées rectangles*, mais des *coordonnées curvilignes* et non *rectilignes*. Comme celles-là, ρ_1, ρ_2, sont particulièrement propres à l'étude de la surface d'un ellipsoïde, on les qualifie d'*ellipsoïdales* ou,

plus simplement, d'*elliptiques*, et, par extension, on appellera même *coordonnées elliptiques* l'ensemble des trois variables ρ, ρ_1, ρ_2, considérées dans un espace à trois dimensions, indéfini ou limité, qu'il s'agira de découper rectangulairement suivant des ellipsoïdes et des hyperboloïdes homofocaux.

Lamé a donné, en général, le nom de *coordonnées curvilignes orthogonales*, soit aux paramètres ρ_1, ρ_2 de deux familles de courbes divisant une surface donnée, plane ou non, en rectangles curvilignes infiniment petits, soit aux paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 de trois familles de surfaces décomposant l'espace en parallélépipèdes curvilignes rectangles élémentaires, surfaces analogues aux plans $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ qui, dans un système ordinaire de coordonnées rectilignes orthogonales, découpent l'espace en prismes rectangulaires. Et l'on conçoit que, plus généralement encore, les paramètres de deux familles distinctes de lignes, sur une superficie, ou de trois familles distinctes de surfaces, dans l'étendue solide, pourraient, sans que ces figures se coupassent à angle droit, servir de coordonnées, c'est-à-dire, par exemple, de variables indépendantes des fonctions de point, pourvu que deux quelconques de ces lignes ou trois quelconques de ces surfaces n'eussent dans l'espace considéré qu'une seule intersection. Ces lignes ou surfaces, à cause de la continuité (impliquant le quasi-parallélisme de celles de même famille en des points voisins), diviseraient alors l'étendue à deux ou à trois dimensions en parallélogrammes ou en parallélépipèdes infiniment petits légèrement curvilignes, de même que, dans un système de coordonnées rectilignes obliques x, y, z, les droites ou les plans $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ découpent l'espace soit plan, soit solide, en parallélogrammes ou en parallélépipèdes ordinaires.

Ces sortes de variables, principalement celles qui sont des coordonnées orthogonales, s'emploient dans l'étude physico-mathématique des corps dont le contour ou la surface appartient aux familles qui les ont pour paramètres; de sorte que les limites de l'espace à considérer vérifient des relations comme $\rho = \text{const.}$, ou $\rho_1 = \text{const.}$, etc., pareillement à ce qui arrive, avec des coordonnées rectilignes x, y, z, aux limites d'une plaque ou d'un prisme ayant leurs arêtes parallèles aux axes.

Il est, du reste, facile de voir que les trois systèmes, particulièrement utiles, des coordonnées rectilignes rectangles, des coordonnées cylindriques ou semi-polaires, et des coordonnées sphériques ou polaires, rentrent comme cas très spéciaux dans les coordonnées curvilignes orthogonales et même dans la catégorie des coordonnées

elliptiques définies par (25). D'abord, il suffit de faire grandir indéfiniment α et $\beta-\alpha$ pour que deux au moins des trois dénominateurs ρ, $\rho-\alpha$, $\rho-\beta$ soient infinis à chaque instant, et entraînent ainsi dans (25) l'annulation, sauf aux distances infinies de l'origine, des termes où ils figurent. Par suite, les trois sortes de surfaces représentées par cette équation se réduisent aux familles de plans $x^2=$ const., $y^2=$ const., $z^2=$ const.; et les coordonnées elliptiques dégénèrent bien, à la limite, en coordonnées rectilignes rectangles.

Supposons maintenant que, β restant fini, α, compris entre zéro et β, s'approche indéfiniment de l'une de ces deux limites. Alors, dans (25), le second dénominateur, $\rho-\alpha$, est presque égal ou au premier ρ, ou au troisième $\rho-\beta$, et toutes les valeurs de ρ intermédiaires soit entre zéro et α, soit entre α et β, annulent presque le dénominateur moyen $\rho-\alpha$ en même temps qu'un des extrêmes, rendant ainsi très grands, et complètement prépondérants dans l'équation, ou le premier et le deuxième terme, ou le deuxième et le troisième. A la limite, l'équation (25) se réduit donc à ces deux termes, et revient simplement à poser soit $\frac{x^2}{y^2}=$ const., soit $\frac{z^2}{y^2}=$ const., pour une des deux familles d'hyperboloïdes, qui dégénèrent ainsi en de simples plans se croisant suivant l'axe ou des z, ou des x. Quant aux deux autres familles de surfaces représentées par (25), et chez lesquelles $\rho-\alpha$ peut n'être pas distingué ou de ρ ou de $\rho-\beta$, les coordonnées x, y, z n'y figurent, après addition de deux des trois fractions, que par les deux numérateurs z^2 et x^2+y^2, ou x^2 et y^2+z^2; ce qui rend, dans le premier cas, l'ordonnée z des surfaces simplement fonction de la distance $\sqrt{x^2+y^2}$ à l'axe des z, et de même, dans le second, x fonction de la distance $\sqrt{y^2+z^2}$ à l'axe des x. Autrement dit, ces surfaces sont *de révolution* autour de l'axe ou des z ou des x. Leur coupe par le plan $y=0$ des zx ayant pour équation, d'après (25),

$$(29)\qquad \frac{x^2}{\rho}+\frac{z^2}{\rho-\beta}=1,$$

on voit que ces deux familles d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à une nappe ou à deux nappes naissent de la rotation de deux familles d'ellipses et d'hyperboles homofocales autour de celui de leurs axes suivant lequel a été déjà menée la famille de plans méridiens issue, comme cas limite, d'hyperboloïdes à deux ou à une nappe.

Cela posé, bornons-nous au cas où l'axe de révolution est celui des z, et supposons que β, resté jusqu'ici arbitraire, soit ou infini ou nul. Faire β infini, ce sera, pour toute valeur de ρ, rendre nécessairement

infini l'un ou l'autre des deux dénominateurs ρ, $\rho - \beta$ et, par suite, réduire le premier membre de (29) à un seul terme. Les génératrices des surfaces de révolution deviennent, de la sorte, soit les parallèles $x =$ const., soit les perpendiculaires $z =$ const., à l'axe même de la révolution; et ces deux familles de surfaces sont simplement des cylindres et des plans. On a donc un système de coordonnées *semi-polaires*, où l'*azimut* est un paramètre caractéristique des divers plans méridiens, le *rayon* r, un autre paramètre, définissant les cylindres *conaxiques* décrits autour de l'axe de révolution, et, l'*ordonnée* z, un troisième paramètre, qui définit les plans normaux à cet axe. Enfin, supposer β nul, ce sera réunir à l'origine les deux foyers des ellipses et des hyperboles, c'est-à-dire réduire les ellipses à des cercles, les hyperboles à leurs asymptotes, les ellipsoïdes à des sphères et les hyperboloïdes à des cônes de révolution autour de l'axe des z. Et l'on aura ainsi un système de coordonnées *polaires*, où l'*azimut* θ définira encore les plans méridiens déjà obtenus, où la *hauteur angulaire* φ, angle des génératrices des cônes avec le plan des xy, sera le paramètre caractéristique de ces cônes, et, le *rayon vecteur* r, celui des sphères concentriques.

206*. — Problème de la déformation des surfaces; calcul des dilatations linéaires éprouvées par une petite partie d'une surface que l'on déforme.

Une surface dont la forme varie peut être regardée comme le lieu d'une infinité de points juxtaposés, qui éprouveraient des déplacements variables eux-mêmes, d'un instant à l'autre et d'un de ces points à ses voisins, d'après une loi continue quelconque. Afin de mieux fixer les idées, nous nous représenterons une telle surface sous la forme d'une membrane matérielle élastique, que l'on fléchirait ou étirerait, et sur laquelle seraient effectivement marqués les points dont nous aurons à étudier les déplacements.

Bornons-nous, pour simplifier, à une partie de surface ou de membrane assez peu étendue en tous sens pour que les changements de direction du plan tangent d'un bout à l'autre n'y soient que de petits angles; et, afin de n'avoir à considérer que de faibles déplacements, choisissons pour origine un de ses points, toujours le même, pour axe des x la tangente à une ligne matérielle quelconque tracée sur la membrane à partir de ce point, c'est-à-dire le prolongement de l'élément rectiligne qui le joint à un autre contigu pris sur la ligne en question, enfin, pour axe des y, une perpendiculaire à celui des x, constamment tangente comme lui à la surface, et pour axe des z une droite qui lui soit constamment normale. Alors les divers points de la

petite partie dont il s'agit, ou qui entoure l'origine, seront bien distingués les uns des autres, c'est-à-dire parfaitement définis, si l'on donne, dans un premier état, dit ***primitif*** et censé connu, de la surface, les deux petites coordonnées x et y de leurs projections sur le plan des xy; car leur ordonnée z résultera de l'équation de la surface. Cette ordonnée z se confondra même très sensiblement avec celle du paraboloïde de contact mené à l'origine, et elle sera (p. 245*), en appelant r, s, t, comme à l'ordinaire, les valeurs correspondantes des trois dérivées secondes de z en x et y,

$$(30)\qquad z = \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

Après les déformations que l'on veut étudier, les deux premières coordonnées x, y de chaque point auront crû des ***composantes*** suivant les x et les y, ou ***tangentielles***, de son ***déplacement***, composantes que j'appellerai respectivement u, v et qui, variant d'un point à l'autre, c'est-à-dire avec x et y, seront ainsi deux certaines *fonctions* des deux coordonnées primitives x, y. Les déformations produites se trouveront justement définies par ces deux fonctions u, v, jointes à la connaissance de l'ancienne ordonnée normale z, donnée par (30), et de la nouvelle, z', du même point matériel (qui a actuellement les coordonnées tangentielles $x+u$, $y+v$), ordonnée dont l'expression sera évidemment

$$(31)\qquad z' = \tfrac{1}{2}[r'(x+u)^2 + 2s'(x+u)(y+v) + t'(y+v)^2],$$

si r', s', t' désignent dans le nouvel état de la surface les valeurs, à l'origine, des trois dérivées secondes respectives de l'ordonnée normale (ou suivant les z) par rapport aux coordonnées indépendantes tangentielles (ou suivant les x et les y).

Supposons les déformations de la petite partie de membrane assez restreintes pour que les points voisins gardent sensiblement leurs distances mutuelles, ou pour que, par exemple, un triangle légèrement curviligne, d'abord rectangle, ayant son sommet au point matériel (x, y, z) et comme base, sensiblement égale à x, la ligne à laquelle l'axe des x reste tangente (comptée depuis l'origine), conserve des côtés valant à fort peu près x, y, $\sqrt{x^2+y^2}$, ainsi que, par suite, ses angles et sa forme. C'est dire que les nouvelles coordonnées $x+u$, $y+v$ du point considéré auront des rapports peu différents de l'unité avec leurs valeurs primitives x, y, ou que les fonctions u, v seront très petites en comparaison de x, y. Au contraire, dans (31), r', s', t' différeront notablement de r, s, t, à cause de la petitesse de z devant x et y, qui permet à cette ordonnée de changer dans un rapport quel-

conque sans qu'il en résulte des variations sensibles de distance entre points très voisins. Donc, on pourra, dans le second membre de (31), réduire $x + u$, $y + v$ à x, y et prendre, par conséquent,

$$z' = \tfrac{1}{2}(r'x^2 + 2s'xy + t'y^2), \tag{32}$$

sauf erreurs négligeables tant sur z' que sur $z' - z$.

La composante $z' - z$ du déplacement dans le sens normal des z sera donc, en général, une fonction de x et de y beaucoup plus simple que ses composantes u, v suivant les sens tangentiels des x et des y. Celles-ci pourront être de très petites fonctions quelconques de x et de y, à cela près toutefois : 1° qu'elles devront s'annuler pour $x = 0$, $y = 0$, puisque le point situé à l'origine ne la quitte pas ou a ses déplacements u, v nuls, et, 2°, que la seconde, v, devra avoir sa dérivée en x également nulle à l'origine, puisque l'axe des x ne cesse pas d'être tangent à une même ligne de la membrane, ou que le déplacement v suivant l'axe des y, déjà nul pour l'origine, l'est encore pour le point dont les deux coordonnées tangentielles primitives x, y dépassent les siennes, respectivement, de dx et de zéro.

Les situations tant primitives que finales de tous les points de la membrane voisins de l'origine étant ainsi fixées, évaluons la *dilatation*, ou allongement par unité de longueur, qu'aura éprouvée l'élément rectiligne ou la fibre matérielle joignant deux quelconques d'entre eux infiniment voisins. Si x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sont les coordonnées primitives de ces deux points, et ds leur distance $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ dans le premier état de la surface, leurs coordonnées finales seront, avec les notations convenues, $x + u$, $y + v$, z' et $x + dx + u + du$, $y + dy + v + dv$, $z' + dz'$, où du, dv, éléments de u, v, se trouveront, en général, aussi petits à côté de dx et de dy, éléments analogues de x, y, que le sont en comparaison de x, y les déplacements u, v eux-mêmes, devenus différents de zéro en même temps que x, y. Et la nouvelle distance, ou droite de jonction, des deux points, aura pour carré $(dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + dz'^2$, c'est-à-dire que ce carré aura grandi de

$$2dx\,du + 2dy\,dv + du^2 + dv^2 + dz'^2 - dz^2,$$

ou bien, en négligeant du^2, dv^2 par rapport à $dx\,du$, $dy\,dv$, de

$$2dx\,du + 2dy\,dv + dz'^2 - dz^2. \tag{33}$$

Or appelons Δ la petite *dilatation linéaire* que l'on veut évaluer, et, par conséquent, $1 + \Delta$ le rapport de la nouvelle distance de deux points à ds. Cette nouvelle distance sera $(1 + \Delta)ds$; et son carré,

$(1+2\Delta+\Delta^2)ds^2$, aura grandi de $(2\Delta+\Delta^2)ds^2$ ou, très sensiblement, de $2\Delta ds^2$. L'expression (33) vaut donc le produit de Δ par $2ds^2$; et il en résulte, pour la dilatation Δ de la fibre ds de la membrane,

$$(34)\qquad \Delta = \frac{dx\,du + dy\,dv}{ds^2} + \frac{dz'^2 - dz^2}{2ds^2}.$$

Évaluons séparément les deux fractions qui composent le second membre et, d'abord, la première, où paraissent les différentielles du, dv des déplacements tangentiels.

Comme u, v sont deux certaines fonctions de x et de y, du et dv y ont les valeurs

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy, \qquad dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy.$$

D'ailleurs, l'élément de fibre en question, ds, se distingue de tous les autres qui pourraient être menés à partir du même point (dont les deux premières coordonnées primitives sont x, y), par sa direction primitive, définie au moyen de deux angles α, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ qu'il faisait, en projection sur le plan des xy, avec les deux axes des x et des y; et ces angles, par suite du quasi-parallélisme du plan tangent au point considéré, ou de l'élément lui-même, avec le plan des xy, ne diffèrent pas d'une manière appréciable de ceux que faisait, dans l'espace, l'élément ds avec deux parallèles aux x et aux y émanées de (x, y, z). On a donc

$$dx = ds\cos\alpha, \qquad dy = ds\sin\alpha;$$

et il vient, comme valeur de la première partie de l'expression (34) de Δ, à laquelle se réduirait Δ si, z et z' s'annulant, la membrane était plane,

$$(35)\qquad \frac{dx\,du+dy\,dv}{ds^2} = \frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\sin^2\alpha + \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\sin\alpha.$$

Or la seconde partie de Δ, où figure $dz'^2 - dz^2$, comporte, à un terme près, une expression analogue. En effet, la formule (30), par exemple, donne

$$dz = (rx+sy)dx + (sx+ty)dy,$$

d'où

$$(36)\qquad \begin{cases} dz^2 = (rx+sy)^2dx^2 + (sx+ty)^2dy^2 \\ \qquad + 2s(rx^2+2sxy+ty^2)dx\,dy + 2(rt-s^2)xy\,dx\,dy. \end{cases}$$

Mais on a identiquement

$$(37)\quad \begin{cases} rx^2+2sxy+ty^2 = \dfrac{(rx+sy)^2+(rt-s^2)y^2}{r} \\ \qquad\qquad = \dfrac{(sx+ty)^2+(rt-s^2)x^2}{t}, \end{cases}$$

en sorte que l'expression $2(rx^2+2sxy+ty^2)$ peut être remplacée dans (36) par la somme des deuxième et troisième membres de (37); et alors il vient presque immédiatement

$$(38)\quad \begin{cases} ds^2 = dx\,d\dfrac{(rx+sy)^3+s(rt-s^2)y^3}{3r} \\ \qquad + dy\,d\dfrac{(sx+ty)^3+s(rt-s^2)x^3}{3t} + 2(rt-s^2)xy\,dx\,dy. \end{cases}$$

On aurait de même, en partant de (32),

$$(39)\quad \begin{cases} ds'^2 = dx\,d\dfrac{(r'x+s'y)^3+s'(r't'-s'^2)y^3}{3r'} \\ \qquad + dy\,d\dfrac{(s'x+t'y)^3+s'(r't'-s'^2)x^3}{3t'} + 2(r't'-s'^2)xy\,dx\,dy. \end{cases}$$

D'après la seconde formule (24) de la Leçon précédente [p. 262*], où il faudra faire ici $p^2+q^2=0$ à cause du plan des xy choisi, les deux expressions $rt-s^2$, $r't'-s'^2$ représentent ce que nous avons appelé la *courbure essentielle* ou *permanente* de la surface dans ses deux états respectifs, au point choisi comme origine, c'est-à-dire le produit de ses deux courbures principales en ce point. Désignons, pour abréger, ce produit par C dans le premier état, par C' dans le second; et, en retranchant (38) de (39), il viendra

$$(40)\quad ds'^2-ds^2 = -2dx\,dU - 2dy\,dV + 2(C'-C)xy\,dx\,dy,$$

si l'on appelle U, V les fonctions de x et de y, entières et homogènes du troisième degré,

$$(41)\quad \begin{cases} U = \dfrac{(rx+sy)^3+sCy^3}{6r} - \dfrac{(r'x+s'y)^3+s'C'y^3}{6r'}, \\ V = \dfrac{(sx+ty)^3+sCx^3}{6t} - \dfrac{(s'x+t'y)^3+s'C'x^3}{6t'}. \end{cases}$$

Par suite, la dernière partie de la valeur (34) de Δ prendra la forme

$$\frac{ds'^2-ds^2}{2ds^2} = -\frac{dx\,dU+dy\,dV}{ds^2} + (C'-C)xy\frac{dx\,dy}{ds^2},$$

ou enfin, après substitution à dU, dV de $\dfrac{d(U,V)}{dx}dx + \dfrac{d(U,V)}{dy}dy$,

puis, à dx et dy, de $ds\cos\alpha$ et $ds\sin\alpha$,

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{ds'^2-ds^2}{2ds^2} &= -\frac{dU}{dx}\cos^2\alpha-\frac{dV}{dy}\sin^2\alpha\\ &\quad -\left(\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dx}\right)\cos\alpha\sin\alpha+(C'-C)xy\cos\alpha\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Telle est donc la partie de Δ qui dépend de ds'^2-ds^2, c'est-à-dire qui tient au changement de forme de la surface ou membrane courbe : elle constitue, d'après les valeurs (41) de U et V, une fonction en x, y homogène et entière du second degré, c'est-à-dire du deuxième ordre de petitesse dans le voisinage de l'origine. Ajoutons-la à la partie précédente (35), et nous aurons, comme formule définitive de la petite dilatation Δ éprouvée par une fibre élémentaire quelconque ds de la portion considérée de membrane,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta &= \frac{d(u-U)}{dx}\cos^2\alpha+\frac{d(v-V)}{dy}\sin^2\alpha\\ &\quad +\left[\frac{d(u-U)}{dy}+\frac{d(v-V)}{dx}+(C'-C)xy\right]\cos\alpha\sin\alpha\ (^1).\end{aligned}\right.$$

207*. — Surfaces applicables : condition nécessaire et suffisante pour qu'une petite partie de surface soit applicable sur une surface donnée.

Parmi les déformations que comporte une membrane, c'est-à-dire une plaque élastique assez mince pour qu'on puisse regarder son épaisseur comme infiniment petite, il y a lieu de distinguer surtout celles, dites de simple *flexion*, où aucun élément ds de fibre n'éprouve ni allongement, ni raccourcissement, parce qu'elles sont infiniment plus aisées à produire que toutes autres, une telle plaque étant sans comparaison plus *flexible* qu'*extensible* ou *contractile*, du moins quand la flexion ne va pas jusqu'à la replier sur elle-même, et, aussi, parce que des figures infiniment petites quelconques tracées sur la surface, toujours décomposables en triangles, y gardent, avec leurs dimensions, leurs angles et leurs formes. Quand une surface peut

---

(1) On remarquera l'analogie de cette formule avec celle, qui a été donnée en note à la p. 107* (où elle porte le n° 51 *bis*), de la dilatation d'une fibre quelconque d'un corps à trois dimensions légèrement déformé : les coefficients de $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ y expriment les dilatations des deux éléments rectilignes tracés, à partir du point considéré (x, y), dans les sens des x et des y pour lesquels s'annule $\sin\alpha$ ou $\cos\alpha$, tandis que le coefficient du produit $\cos\alpha\sin\alpha$ y est ce que nous avons appelé, à la p. 106*, un *glissement*.

ainsi se changer en une autre par de simples flexions *finies* (c'est-à-dire n'allant pas jusqu'à la *doubler*), on dit, en la considérant comme *inextensible*, qu'elle est *applicable* sur cette autre sans *déchirure* ni *duplicature*, ou, simplement, qu'elle lui est *applicable*.

Voyons à quelles conditions la petite partie de surface que nous considérons ici, et dont l'équation est (30), pourra être appliquée, près de l'origine, sur la nouvelle surface quelconque ayant à cet endroit l'équation (32). En d'autres termes, faisons passer la membrane, supposée d'abord extensible, de la forme (30) à la forme (32), et cherchons s'il doit y avoir quelque relation entre ces deux formes, pour qu'il existe un mode de déplacements tangentiels u, v (c'est-à-dire une expression des deux fonctions à peu près arbitraires u, v de x et de y), n'entraînant, aux divers points (x, y), aucune dilatation linéaire δ, positive ou négative.

Et d'abord, l'annulation de δ pour tous les éléments ds initialement parallèles aux plans soit des zx, soit des zy, ou dont l'orientation primitive rend nul soit le sinus, soit le cosinus de α, donne, d'après (43),

$$\frac{du}{dx} = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{dv}{dy} = \frac{dV}{dy}.$$

Cette annulation revient donc à dire que u, v doivent varier, avec x ou avec y, comme les fonctions homogènes du troisième degré U, V, et que, par conséquent, à des écarts près d'un ordre de petitesse supérieur au troisième, les différences $u - \mathrm{U}$, $v - \mathrm{V}$ se réduisent constamment, la première, à ses valeurs pour $x = 0$, valeurs dépendant uniquement de y et que je représenterai par $f(y)$, la deuxième, de même, à ses valeurs, fonction seulement de x, relatives à $y = 0$ et que j'appellerai $\varphi(x)$. Ainsi, la conservation de la longueur des éléments ds parallèles aux plans des zx et des zy, ou qui divisent la surface en *mailles* ayant leurs projections sur le plan des xy primitivement rectangulaires, est toujours possible, quelle que soit la nouvelle forme de la partie infiniment petite considérée de surface, pourvu que l'on donne à u, v les expressions, encore indéterminées en partie,

$$(44) \qquad u = \mathrm{U} + f(y), \qquad v = \mathrm{V} + \varphi(x).$$

D'ailleurs, u, v et la dérivée de v en x s'annulant, comme on a vu, à l'origine ($x = 0$, $y = 0$), de même que s'y annulent d'après (41) U, V et la dérivée de V en x, on devra avoir

$$(45) \qquad f(0) = 0, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0.$$

Enfin, la formule (43) de la dilatation, Δ, qu'éprouvent les éléments ds dont l'azimut est α, se trouve alors réduite à

$$(46)\qquad \Delta = [f'(y) + \varphi'(x) - (C' - C)xy]\cos\alpha\sin\alpha.$$

Essayons, puisque les expressions (44) de u et v ne sont pas fixées complètement, d'astreindre même les éléments ds d'orientation quelconque, mais primitivement contigus aux deux coupes de la surface par les plans des zx et des zy, à ne subir non plus aucune dilatation : ce qui permettra aux deux rangées de mailles de la surface qui se projetaient d'abord sur les deux axes des x et des y, de garder même leurs formes primitives et non pas seulement leurs côtés. La formule (46), où nous ferons ainsi $xy = 0$, montre qu'il faudra et qu'il suffira de poser $f'(y) + \varphi'(x) = 0$: relation qui, pour la valeur $x = 0$ annulant $\varphi'(x)$ d'après (45), donne $f'(y) = 0$, et oblige ensuite de prendre aussi identiquement $\varphi'(x) = 0$. Les deux fonctions $f(y)$, $\varphi(x)$ deviennent dès lors deux constantes, que les premières conditions (45) réduisent même à zéro ; et l'on a simplement, au lieu de (44),

$$(47)\qquad u = U, \qquad v = V.$$

Quant à la formule des dilatations linéaires, elle est maintenant, d'après (43) ou (46),

$$(48)\qquad \Delta = (C' - C)xy\cos\alpha\sin\alpha,$$

sauf toujours une erreur généralement très petite en comparaison, c'est-à-dire d'un ordre en x et y supérieur au deuxième. Et cette fonction Δ, même rectifiée par la mise en compte d'une pareille erreur, change bien de signe, en s'annulant par raison de continuité : 1° lorsque, pour des valeurs constantes quelconques de x et de y, α varie dans le voisinage des valeurs qui annulent $\cos\alpha$, $\sin\alpha$; 2° lorsque, α étant de même constant, mais quelconque, x ou y varient près de la valeur zéro.

Dans ce dernier cas, aux endroits (x, y) ainsi déterminés, où Δ s'annule pour une valeur de α autre que les deux dont le cosinus et le sinus sont voisins de zéro, si l'on associe trois fibres élémentaires ds prises suivant ces directions respectives, de manière à en former un triangle infiniment petit, ce triangle sera invariable et, par suite, d'autres fibres de direction quelconque inscrites entre ses côtés ne le seront pas moins. L'annulation simultanée de Δ pour trois éléments ds concourants ou infiniment proches, et de directions distinctes, entraîne donc son annulation pour toutes les valeurs de α. Par conséquent, aux points dont il s'agit, voisins des deux plans des zx et des zy, on a identiquement $\Delta = 0$.

En résumé, *quelle que soit la forme nouvelle prise par la partie infiniment petite considérée de surface, deux familles d'éléments rectilignes, orientés à fort peu près sur toute son étendue suivant les plans des zx et des zy, et même tous les éléments de direction autre contigus à deux lignes infiniment voisines de ces plans, n'auront éprouvé aucun changement de longueur, à la condition nécessaire et suffisante que les déplacements tangentiels u, v des divers points aient reçu sensiblement les valeurs* (47), *où* U, V *sont les polynômes homogènes, du troisième degré en x, y, définis par* (41).

Mais la formule (48) montre que les autres éléments rectilignes ds seront, les uns dilatés, les autres contractés, suivant le signe de l'expression $xy \cos\alpha \sin\alpha$, à moins qu'on n'ait $C' - C = 0$, ou que le produit des deux courbures principales ne soit pareil dans les deux portions de surface que l'on veut appliquer l'une sur l'autre.

Ainsi se trouve établi le théorème de Gauss dont il a été parlé précédemment (p. 250*), et d'après lequel, *dans toute surface que l'on déforme par simple flexion, le produit des deux courbures principales reste invariable en chaque point.* Mais la formule (48) donnée ici montre de plus que cette condition, de l'égalité des produits C, C' des deux courbures principales dans deux parties infiniment petites de surface, est suffisante pour qu'une de ces parties puisse, sauf la non-coïncidence des contours, être appliquée sur l'autre par simple flexion, ou, du moins, avec des extensions et contractions $\pm\Delta$ incomparablement plus faibles que celles, représentées par (43) et (48), qui auraient lieu si C' différait de C.

Il suit de là, par exemple, qu'une surface applicable sur une sphère d'un rayon donné a vérifie dans toute son étendue, d'après la formule (24) [p. 262*] du produit des deux courbures principales, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(49) \qquad \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Il en résulte encore qu'une plaque élastique, assez peu épaisse pour ne résister notablement qu'aux extensions ou aux contractions perceptibles, ainsi qu'aux flexions extrêmement prononcées, et, par conséquent, beaucoup plus aisée à fléchir modérément qu'à étendre, comprimer ou doubler, prendra d'elle-même, en tout point où le produit de ses deux courbures n'est pas nul, un rayon de courbure principal d'autant moindre qu'on y fera davantage grandir l'autre, se fermant ainsi de plus en plus dans le sens de l'une de ses sections principales

à mesure qu'on l'ouvrira plus complètement dans le sens perpendiculaire.

208*. — Des surfaces applicables sur un plan, ou développables, et, plus généralement, des surfaces réglées, ainsi que de la génération des surfaces courbes par des lignes dites caractéristiques.

Le lieu des intersections successives d'une série continue de plans, formé des bandes infiniment étroites et longues que comprennent, sur chacun d'eux, ses deux intersections par celui qui précède et par celui qui suit, constitue, on l'a vu déjà (aux pp. 224* et 267*), une surface applicable sur un plan ou, comme on dit, *développable;* car il suffit, pour la rendre plane par simple flexion, d'y considérer successivement les diverses génératrices, qui sont les bords rectilignes communs à deux bandes juxtaposées, et de faire tourner autour de chacun de ces bords toute la partie de surface située au delà, de manière à amener la première des bandes qui la composent sur le plan prolongé de la bande précédente. D'ailleurs, les arêtes d'un pareil assemblage de bandes s'effacent, et la continuité de la surface s'établit, à la limite considérée, où chaque bande, tout en restant dans son plan, s'est infiniment amincie; car ce plan n'y fait plus avec ceux d'une infinité de bandes voisines que des angles insensibles, mesurant les rotations élémentaires d'un plan mobile que l'on peut concevoir dessiner, par ses positions successives, toute la série donnée de plans. Mais, à cette limite où la surface s'est ainsi arrondie, deux génératrices aussi rapprochées qu'on voudra, dès qu'on les prend distinctes, en comprennent toujours entre elles une infinité d'autres ne se reliant que chacune à la suivante, et elles n'ont plus de point commun. Ainsi, le fait de l'intersection des génératrices consécutives, évident dans les assemblages de bandes planes, s'évanouit en quelque sorte dans leurs limites courbes, qui lui doivent cependant la propriété d'être applicables sur un plan.

Si l'enveloppe de toute série continue de plans est une surface développable, à l'inverse, toute surface applicable sur un plan est-elle un pareil lieu d'intersections successives de plans? C'est ce que permet d'affirmer le théorème précédent de Gauss, en vertu duquel le produit des deux courbures principales d'une telle surface est nul en tous ses points comme dans le plan dont elle peut prendre la forme. Car il en résulte l'égalité à zéro de l'une des courbures principales de la surface, ou la réduction des angles de contingence correspondants à des infiniment petits d'un ordre supérieur au premier; ce qui signifie que, tout le long de l'une des deux familles de lignes de courbure de la

surface, les normales successives font entre elles des angles, d'un pareil ordre, ne pouvant donner en tout, sur une longueur finie de ligne de courbure, qu'un changement de direction de la normale inférieur à toute quantité perceptible, c'est-à-dire nul. Ainsi la surface, supposée représentée comme à l'ordinaire par une équation de la forme $z=f(x, y)$, a, tout le long d'une quelconque des lignes de courbure dont il s'agit, sa normale et son plan tangent pareillement orientés, ou, en d'autres termes, les deux dérivées partielles p, q de son ordonnée z invariables. Or il suit de là que ce plan tangent, dont l'équation peut s'écrire, d'après la formule (1) [p. 251],

$$z_1 = px_1 + qy_1 + (z - px - qy), \tag{50}$$

est le même d'un bout à l'autre de la ligne de courbure; car, p, q n'y changeant pas, la différentielle de $px+qy$ d'un point à l'autre s'y réduit à $p\,dx+q\,dy$ ou à dz, ce qui rend invariable le terme $z-px-qy$ de l'équation, non moins que les coefficients p, q. Comme, enfin, à côté de ce plan ainsi tangent tout le long d'une ligne de courbure, il y en aura un second analogue, dont l'intersection par le premier passera, comme on sait (p. 223*), infiniment près de tous les points de contact de celui-ci avec la surface, puis, à la suite, un troisième, etc., les lignes de courbure considérées ne seront autre chose que les intersections successives de ces plans, et, la surface qu'elles sillonnent, le lieu de ces intersections.

En résumé, les surfaces développables, lieux d'intersections successives de plans, et que l'on réalise de temps immémorial dans les arts au moyen de plaques planes diversement fléchies autour d'une suite continue de droites, sont les seules surfaces susceptibles d'être étalées ou déroulées sur un plan sans extension ni contraction; et l'on peut les caractériser par l'équation aux dérivées partielles du second ordre $rt-s^2=0$, à laquelle se réduit celle, (49), des surfaces applicables sur une sphère, quand on suppose infini le rayon a de la sphère. Nous verrons, en effet, vers la fin du Calcul intégral, que toute surface dont l'ordonnée vérifie cette équation $rt-s^2=0$ est bien l'enveloppe d'une *série* de plans.

Deux génératrices *consécutives*, étant dans un même plan, se coupent (à moins qu'elles ne soient parallèles et que la surface ne se réduise à un *cylindre*): ce qui revient évidemment à dire que les génératrices ont, sur la surface développable, une *enveloppe*, ou qu'il existe une courbe, lieu de leurs intersections successives, à laquelle elles sont toutes tangentes. Et il est clair qu'à l'inverse le lieu des tangentes à une courbe quelconque, droites qu'on peut regarder comme

les prolongements des côtés d'une ligne polygonale à sommets infiniment voisins inscrite dans la courbe, constitue une surface développable, dont le déroulement sur un plan transforme justement la courbe gauche proposée, comme on a vu (p. 217*), en une courbe plane ayant les mêmes angles de contingence et les mêmes rayons de courbure.

Une surface développable peut donc toujours être engendrée par une droite mobile constamment tangente à une courbe, ou qui *roulerait* sur elle. Or un pareil mouvement, réductible, entre deux génératrices consécutives, à une simple rotation autour de leur intersection et dans leur plan qui est le plan osculateur de la courbe, fait décrire à tout point de la droite une sorte de roulette, sans cesse normale, d'après le théorème de Descartes (p. 218), à la droite génératrice et présentant, par suite, un rebroussement à l'endroit où le point décrivant touche la courbe. En effet, tant au delà qu'en deçà de cet endroit, le point décrivant reste, comme la droite génératrice, dans la partie de l'espace vers laquelle est convexe la courbe, et il s'éloigne de celle-ci tangentiellement à la normale suivant laquelle il était venu. Mais, après son rebroussement, le point décrivant la roulette n'est plus situé sur la même nappe de surface développable qu'avant; car il se trouve désormais en arrière du point de contact actuel de la génératrice avec la courbe, après avoir été en avant, ou n'appartient plus aux tangentes à la courbe tirées dans la direction vers laquelle marche le point de contact, mais à leurs prolongements de direction opposée. Or les tangentes menées de l'une quelconque de ces deux manières suffisent évidemment, quand la surface développable est étalée sur un plan, pour couvrir la partie du plan vers laquelle la courbe tourne sa convexité, et elles formaient par suite, avant le déroulement, une nappe complète de la surface, que le déroulement a amenée en coïncidence avec la nappe analogue, lieu des tangentes tirées de l'autre manière. Et comme, le long de chaque élément de la courbe bord commun des deux nappes, il n'y a pour celles-ci qu'un plan tangent unique, celui dans lequel roule, à fort peu près, la génératrice alors qu'elle engendre presque à la fois leurs bandes de sens opposés contiguës à cet élément, la courbe est une *arête* de la surface, lieu de rebroussements non seulement pour les roulettes dont il vient d'être parlé, mais encore pour les coupes de la surface par des plans quelconques non tangents à la courbe. C'est pourquoi celle-ci, sur laquelle roule la droite génératrice, a été nommée l'*arête de rebroussement* de la surface. Elle se réduit à un point unique, savoir, au *sommet*, dans les *cônes*.

Observons que, hors ce cas singulier d'un cône (susceptible de dé-

générer en cylindre) et encore seulement d'un cône ayant ses deux nappes ouvertes et d'une étendue angulaire totale suffisamment limitée, l'ensemble d'une surface développable ne peut pas, sans duplicature, s'étaler sur un plan, puisque le déroulement amène *l'une sur l'autre* les parties des deux nappes contiguës à l'arête.

On appelle, en général, *surface réglée*, le lieu formé par une famille ou suite continue de droites émanant des divers points d'une ligne donnée quelconque, dite *directrice*. Lorsque la distance minima de deux droites ou *génératrices* infiniment voisines y est d'un ordre de petitesse supérieur à la distance de leurs pieds sur la directrice ou, ce qui revient généralement au même, à l'angle mesurant le changement de direction éprouvé d'une génératrice à l'autre, le lieu de ces droites se réduit à une surface développable, comme on l'a vu plus haut (p. 267*) à propos des *normalies* qui ont pour directrices les lignes de courbure d'une surface.

Mais il n'en est plus de même, et la surface réglée est dite *gauche*, quand la distance minima, que j'appellerai δ, de deux génératrices voisines, est (numériquement) de l'ordre de l'angle formé par l'une d'elles avec une parallèle à l'autre. Alors des éléments rectilignes de la surface, éléments que je désignerai par ε, tirés entre ces deux génératrices normalement à la première, et de plus en plus longs à mesure qu'on s'éloigne de la perpendiculaire commune δ, s'inclinent aussi de plus en plus sur le plan, dont tous s'éloignent de δ, mené suivant la première parallèlement à la seconde; car ils font avec lui un angle, α, ayant pour sinus $\frac{\delta}{\varepsilon}$. C'est dire que le plan tangent à la surface, mené, en un point quelconque de la première génératrice, suivant cette génératrice et l'élément rectiligne perpendiculaire ε qui en émane, fait lui-même avec le plan fixe considéré l'angle α, variable de $\frac{\pi}{2}$ à zéro quand le point de contact s'éloigne jusqu'à l'infini de chaque côté de la perpendiculaire commune δ. Donc le plan tangent, bien loin de rester le même tout le long d'une génératrice, y tourne en tout de deux droits, et ne tend à y devenir constant qu'aux endroits infiniment éloignés de la perpendiculaire commune δ, là où la distance mutuelle ε des deux génératrices est tellement grande par rapport à δ que la surface interceptée, supposée reproduite semblablement mais en petit, devient une bande de surface développable.

On appelle *ligne de striction* le lieu formé par les pieds des perpendiculaires minima δ menées sur les diverses génératrices à partir des génératrices infiniment voisines : dénomination justifiée par le

resserrement qu'y éprouve chaque bande de surface, comprise entre deux génératrices contiguës et dont la largeur ε atteint sur cette ligne sa valeur la plus petite δ (¹). Il est clair que l'*étranglement* des bandes devient le plus complet possible, quand la ligne de striction se réduit à une arête de rebroussement, ou la surface réglée à une surface développable.

Les plus simples des *surfaces gauches* sont celles où non seulement deux génératrices consécutives, mais toutes les génératrices sont parallèles à un même plan, dit alors *plan directeur*. Si on le suppose horizontal et qu'on le choisisse pour celui des xy, les lignes de niveau $z = c$ de la surface seront de simples droites, et, par conséquent, l'équation de la surface, résolue par rapport à y ou écrite $y = F(x, z) = F(x, c)$, aura son second membre du premier degré en x. De telles surfaces réglées à plan directeur se trouveront donc caractérisées par une équation de la forme

$$(51) \qquad y = x f(z) + \varphi(z),$$

$f(z)$, $\varphi(z)$ y désignant deux *fonctions arbitraires*, c'est-à-dire de forme variable à volonté ou plutôt d'après la nature de deux courbes données (*directrices*) sur lesquelles devront s'appuyer les génératrices constamment horizontales. La perpendiculaire commune à deux lignes de niveau consécutives sera la verticale du point où se croiseront leurs projections sur le plan des xy; de sorte que la ligne de striction aura pour projection horizontale l'enveloppe des projections horizontales des génératrices. La surface prend le nom de *conoïde* quand toutes les génératrices s'appuient sur une même droite, l'axe des z par exemple; cas où, x et y s'annulant simultanément à tous les niveaux z, le dernier terme de (51) disparaît, en sorte que cette équation (51) de la surface, divisée par x, fait alors varier z en fonction uniquement du rapport $\frac{y}{x}$. Et l'on appelle quelquefois, par extension, *conoïde général* toute surface réglée à plan directeur.

Par analogie avec les surfaces réglées développables ou non, lieux de *génératrices* rectilignes, on considère fréquemment une surface comme le lieu d'une famille de courbes, qu'on appelle (du moins dans certains cas particulièrement remarquables dont il sera question vers la fin du *Calcul intégral*) ses *caractéristiques*, et qui, tantôt, se coupent successivement ou viennent toucher une *enveloppe* commune, dite encore

(¹) Le pied de la perpendiculaire minima δ est dit le *point central* de la génératrice correspondante, sur laquelle on suppose cette perpendiculaire abaissée à partir d'une génératrice infiniment voisine.

l'*arête de rebroussement* de la surface, tantôt gardent entre elles leurs distances ou, plus généralement, s'approchent chacune de la suivante jusque dans un certain rapport minimum non évanouissant, en des points dont le lieu est une *ligne de striction* pour les bandes que limitent deux caractéristiques consécutives. Il arrive, d'ailleurs, souvent que ces diverses bandes peuvent être censées, sans erreur finale dans les plans tangents, appartenir à tout autant de surfaces différentes, plus simples que la proposée, et se coupant mutuellement à une distance infiniment petite de leurs points de contact avec elle, pour la même raison, donnée à la p. 223*, que le font deux plans tangents voisins menés à une surface : alors les caractéristiques, suivant lesquelles sont juxtaposées les bandes, deviennent les intersections successives de ces surfaces plus simples, et la surface proposée est l'enveloppe de leur famille. C'est ainsi qu'une surface développable constitue une enveloppe de plans. De même, une surface de révolution, lieu de cercles parallèles décrits autour d'un même axe et comprenant entre eux des *zones* infiniment étroites, peut être regardée comme l'enveloppe des sphères de rayon variable, ayant leur centre sur cet axe, auxquelles appartiennent ces zones ou du moins leurs deux bords.

209*. — Des lignes géodésiques d'une surface; propriété de leurs plans osculateurs.

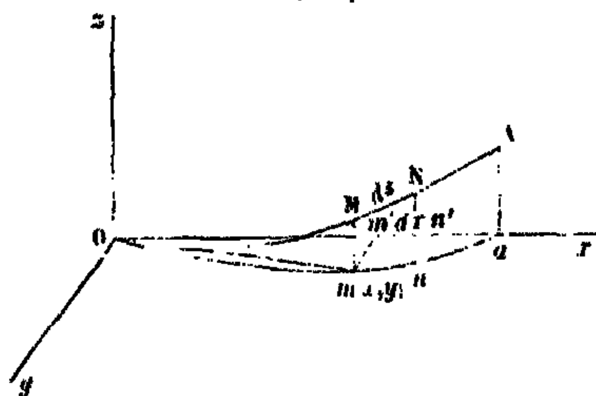
Quand on déforme une surface par simple flexion, il y a toute une catégorie remarquable de lignes la sillonnant qui conserve ses propriétés distinctives : ce sont les lignes appelées *géodésiques*, dont la longueur, entre deux de leurs points voisins, d'ailleurs quelconques, est le plus petite possible, c'est-à-dire au moins aussi faible qu'elle le serait pour toute autre ligne menée sur la surface entre ces deux points. En effet, deux lignes quelconques de la surface aboutissant aux mêmes extrémités gardent leur longueur pendant toutes les déformations dont il s'agit, et celle des deux qui se trouvait primitivement la plus courte ne cesse à aucun instant de l'être.

Les lignes géodésiques jouissent de la propriété d'avoir, en un quelconque de leurs points, leur plan osculateur normal à la surface : autrement dit, *leurs normales principales sont les normales mêmes de la surface.*

Pour le démontrer, soient OMA un arc infiniment petit quelconque tracé sur la surface entre deux points donnés O, A, et O*ma* sa projection sur le plan tangent en O à la surface. Prenons la corde O*a* de cette projection pour axe des x, une perpendiculaire, dans le plan

tangent, pour axe des y, et enfin la normale Oz pour axe des ordonnées z, exprimées ici par l'équation $z = f(x, y)$ de la surface. Comme Oa est une corde infiniment petite, voisine en direction de la même tangente que la corde Om menée de l'origine au point quelconque $m(x, y)$ de Oma, la *pente* de Om par rapport à Ox, quotient de

Fig. 37.



$m'm$ par Om' ou de y par x, est infiniment faible. En d'autres termes, la seconde, y, des deux coordonnées de m, se trouve négligeable à côté de la première, x. De même, si, par des plans comme $m'mM$ et $n'nN$, parallèles aux yz, on divise l'arc OMA en éléments $MN = ds$ infiniment plus petits que l'arc total, les accroissements dy et dx éprouvés, d'un point de division aux suivants, par ces coordonnées y et x, auront entre eux un rapport infiniment faible, mesurant l'inclinaison sur l'axe des x de la tangente correspondante mn menée à Oma.

Il suit de là que l'accroissement simultané, $dz = df(x, y)$, reçu par l'ordonnée z le long de l'élément MN ou ds, aura son expression $f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$, réductible, sauf erreur relative négligeable, au premier terme, lequel ne variera même que dans un rapport infiniment petit si le facteur $f'_x(x, y)$ y est remplacé par $f'_x(x, 0)$; ce qui reviendra à ne déplacer fictivement le point (x, y), dans le plan xOy, que d'une quantité, $-y$, infiniment petite en comparaison de sa distance à l'origine. Ainsi, pour tous les arcs menés sur la surface entre O et A, l'élément ds compris entre deux mêmes plans consécutifs parallèles aux yz a non seulement sa projection dx sur l'axe des x identique, mais aussi sa projection dz sur l'axe des z à fort peu près la même; et il n'y a que la projection dy qui varie dans un rapport notable d'une courbe à l'autre.

Or, dans ces conditions, la formule connue $ds^2 = dx^2 + dz^2 + dy^2$ montre que l'élément en question ds décroît avec dy^2, ou plutôt, que, si l'on compare sa valeur dans une courbe où dy^2 est de l'ordre de petitesse de dz^2 à sa valeur dans une autre courbe, où dy^2 sera infiniment

plus faible que dz^2 et de l'ordre même des petites variations éprouvées par ds^2 d'une courbe à l'autre, c'est dans le second cas que ds se trouvera le plus petit. Cela étant vrai pour tous les éléments ds de l'arc OMA, l'arc OMA tout entier ne pourra atteindre sa moindre valeur que si les rapports d'autant de différentielles consécutives dy que l'on voudra, *en partant du point* O, aux différentielles dz correspondantes, y sont infiniment voisins de zéro; d'où il suit que le nouveau rapport $\frac{y}{z}$, formé par leur addition terme à terme, se trouvera lui-même infiniment petit, car tous les dz sont évidemment de même signe quand on va de O vers A, et l'on peut appliquer un théorème connu (note de la p. 12). Cela revient à dire que l'arc OMA, s'il appartient à une ligne géodésique, ne s'éloignera du plan zOx qu'à des distances y négligeables par rapport à ses écarts du second ordre, z, d'avec le plan tangent xOy; et, comme tout plan qui fait, en un point donné O d'une *courbe,* un angle fini avec le plan osculateur correspondant, s'écarte de celle-ci de quantités dont l'ordre de petitesse ne dépasse pas le second, il faut en conclure que le plan zOx fera un angle infiniment petit avec le plan osculateur en O à la ligne géodésique. Donc, à la limite, c'est-à-dire quand le point A, se rapprochant de O sur la ligne géodésique, viendra se confondre avec O, le plan zOx, sans cesse normal à la surface en O, y sera bien finalement osculateur à cette ligne.

Ainsi, deux éléments consécutifs d'une ligne géodésique sont toujours dans un même plan avec la normale menée à la surface au point intermédiaire. Or il est évident qu'on peut, à partir d'un point quelconque de toute surface, tirer une infinité de pareilles lignes, généralement gauches, savoir, une suivant chaque direction comprise dans le plan tangent au point donné; mais que, leur premier élément une fois choisi, tous les autres s'ensuivent d'ordinaire, déterminés qu'ils sont de proche en proche, sur des longueurs infiniment petites, par les intersections de la surface et des plans normaux menés, chaque fois, au point où l'on est arrivé, suivant l'élément précédemment construit. Et comme ces lignes issues d'un même point divergeront, en général, de plus en plus tout autour, une seule, presque toujours, ira passer par un second point arbitraire, du moins si la surface est ouverte; de sorte qu'il existera bien sur la surface, entre deux points pris à volonté, une ligne parfaitement déterminée de longueur minima.

Sur la sphère, cette ligne se trouvera tout entière dans un même plan diamétral, ou sera une portion de grand cercle; car deux nor-

males consécutives, venant concourir au *centre*, *ne détermineront* avec l'élément intermédiaire de ligne géodésique, pour fixer la direction des deux éléments précédent et suivant, qu'un seul plan, osculateur dès lors pour deux points de la ligne voisins et, par suite, de proche en proche, *pour tous*. De même, sur une surface plane, les normales consécutives, toutes parallèles, auront leurs pieds alignés dans un même plan normal, et la ligne géodésique sera une droite.

210*. — Application aux surfaces développables; rayon de courbure des hélices.

Quand il s'agit d'une surface développable, toute ligne géodésique devient une simple droite dans le déroulement de la surface (sans quoi elle serait, entre deux de ses points, moins courte que la courbe à transformée rectiligne les joignant); et l'angle, que j'appellerai γ, sous lequel, ainsi rectifiée, elle coupe les génératrices successives, varie évidemment, entre une génératrice et la suivante, de l'angle même que font mutuellement celles-ci, c'est-à-dire de l'angle de contingence de l'arc intercepté par elles sur l'arête de rebroussement. D'ailleurs cet angle de contingence, formé par deux génératrices successives, est pareil dans l'arête de rebroussement et dans sa transformée plane, comme on a vu à la p. 217*; ce qui montre que les déformations d'une surface par simple flexion n'y changent pas plus l'angle de deux lignes voisines que leurs longueurs, même dans ce cas limite où il s'agit de l'angle *infiniment* petit des directions de deux génératrices qui ne se rencontrent pas sur la nappe continue à considérer, ni, en toute rigueur, hors de ce champ. Et, de même, c'est-à-dire en vertu du principe de la conservation des angles, mais appliqué au cas, où il se trouve évident, de deux lignes se coupant sur la surface, l'inclinaison de la ligne géodésique par rapport à une génératrice quelconque est précisément, sur la surface courbe, celle qui s'y observe après le développement sur un plan.

Si donc on suppose donnés les angles de contingence successifs de l'arête de rebroussement, toute ligne géodésique aura sa direction sur la surface, à la rencontre des diverses génératrices, parfaitement définie, dès que l'on connaîtra l'angle arbitraire sous lequel elle coupera la première génératrice; et cette ligne sera déterminée ou pourra être construite de proche en proche.

Comme sa normale principale, en un point quelconque (x, y, z), coïncidera avec la normale même de la surface, son rayon de courbure, que j'appellerai ρ, sera donné par la formule d'Euler, (11), dé-

montrée dans la dernière Leçon [p. 256*]. Il suffira d'observer qu'ici la courbure principale de la surface au point (x, y, z), dans le sens de la génératrice suivant lequel la normale a une direction constante, se trouvera nulle, et que, par suite, en appelant R le rayon de courbure en (x, y, z) de la section normale faite par un plan perpendiculaire à la génératrice ou tangent à la ligne de courbure non rectiligne, on aura simplement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\gamma}{R}, \tag{52}$$

puisque la tangente à la courbe géodésique considérée fera l'angle complémentaire de γ avec cette unique section principale dont la courbure ne soit pas égale à zéro. Remarquons, à ce propos, que l'indicatrice, ayant son équation $\frac{X^2}{R} + \frac{Y^2}{R'} = \pm 1$ réduite à $\frac{X^2}{R} = \pm 1$ par l'hypothèse $R' = \pm \infty$, se composera de deux parallèles à la génératrice.

Quand la surface se réduit à un cylindre, que nous supposerons, pour fixer les idées, avoir ses génératrices verticales, les lignes géodésiques, dont les transformées planes sont des droites, prennent le nom d'*hélices*, et coupent sous un même angle γ toutes les génératrices, qui, sur la surface déroulée, sont de simples parallèles. La pente $\cot\gamma$ de ces hélices est donc constante. Je la désignerai par m; ce qui donnera pour l'inverse de $\sin^2\gamma$ la valeur $1 + m^2$. Et la formule (52) se changera en celle-ci :

$$\rho = (1 + m^2) R, \tag{53}$$

dans laquelle R sera évidemment le rayon de courbure de la section droite, ou de la base du cylindre, à son intersection par la génératrice considérée. Donc, *en tout point d'une hélice tracée sur une surface cylindrique quelconque, le rapport du rayon de courbure de cette courbe, au rayon de courbure de la section droite du cylindre, excède l'unité d'une quantité égale au carré de la pente constante de l'hélice par rapport à la base du cylindre.*

Observons que l'on aurait pu, du fait que cette pente est constante ou que le cosinus de l'angle γ de la tangente avec l'axe des z a sa dérivée nulle, déduire la perpendicularité de la génératrice à la normale principale et, par suite, vu d'ailleurs la perpendicularité de l'hélice à cette normale principale, conclure la normalité de celle-ci à la surface même. En effet, les cosinus directeurs de la normale principale étant proportionnels, dans toute courbe (p. 210*), aux dérivées premières des trois cosinus directeurs $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ de la tangente, il suffit que

la troisième de ces dérivées s'annule pour que la normale principale soit dans un plan perpendiculaire à l'axe des z.

Supposons, enfin, le cylindre circulaire, cas où la courbe devient une hélice ordinaire et où R est le rayon même du cercle de base du cylindre. Appelons r *le rayon d'une circonférence équivalente à une spire*, c'est-à-dire à un arc d'hélice ayant pour projection sur la base du cylindre tout le contour $2\pi R$ de celle-ci, et qui, déroulé, serait l'hypoténuse d'un triangle rectangle de base $2\pi R$, avec son angle aigu adjacent complémentaire de γ et son troisième côté égal au *pas* de l'hélice ou portion de génératrice comprise sur le cylindre entre les deux extrémités de la spire. Alors le rapport de la base $2\pi R$ à l'hypoténuse $2\pi r$ représente $\sin\gamma$, et la formule (52), par la substitution à $\sin\gamma$ de ce rapport, devient simplement, en multipliant par $r^2\rho$,

$$r^2 = R\rho \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{r^2}{R}. \tag{54}$$

En d'autres termes, *le rayon d'une circonférence équivalente à une spire est moyen proportionnel entre celui du cylindre et le rayon de courbure de l'hélice*. Telle est la relation d'où l'on déduira le rayon, ρ, de l'arc circulaire en lequel se transforme l'hélice, par le déroulement, sur un plan, de la surface (appelée *hélicoïde développable*) lieu de ses tangentes.

211*. — Raison de la dénomination des lignes géodésiques; courbure géodésique des lignes d'une surface.

Si les lignes de longueur minimum entre points voisins, tracées sur une surface, ont reçu le nom de *lignes géodésiques*, c'est sans doute pour rappeler qu'elles sont justement celles qu'on indique sur le terrain lorsque, dans des opérations d'arpentage ou de *géodésie*, on jalonne ce qu'on appelle des *alignements*. Alors, en effet, on ramène, par des projections, les figures existant sur la surface terrestre à ce qu'elles seraient si cette surface était rendue partout horizontale, c'est-à-dire partout perpendiculaire à la direction du *fil à plomb;* et, de plus, sur trois points consécutifs de tout alignement, le troisième est toujours pris dans le prolongement du plan mené suivant le premier et la normale passant par le second, normale que représente soit un jalon vertical, soit (lorsqu'on emploie l'équerre d'arpenteur, le théodolite, etc.) deux fils voisins déterminant un plan de visée vertical. De fait, si, à cause de la courbure de la Terre, les lignes ainsi racées ne sont pas droites, du moins elles sont aussi peu courbes que

possible. Cela résulte du théorème de Meusnier (p. 257*), en vertu duquel toute ligne tracée sur une surface, *tangentiellement à une droite donnée*, a sa courbure, en son point de contact avec la droite, d'autant plus petite que son plan osculateur y fait un angle moindre avec la normale à la surface; de sorte qu'elle diffère aussi peu que possible d'une droite quand ce plan contient la normale.

La propriété caractéristique des lignes géodésiques s'énonce aussi en disant que leur courbure géodésique est nulle; car on appelle, en général, *courbure géodésique* d'une ligne tracée sur une surface, la courbure de sa projection sur le plan tangent mené à la surface au point considéré, ou, autrement dit, la courbure telle qu'on l'évaluerait, si l'on mesurait, au lieu de l'angle de contingence formé par deux éléments consécutifs de la courbe, l'angle dièdre des deux plans dirigés suivant chacun de ces éléments et la normale à la surface en leur point commun.

212*. — Autres propriétés générales des lignes géodésiques; cercles géodésiques.

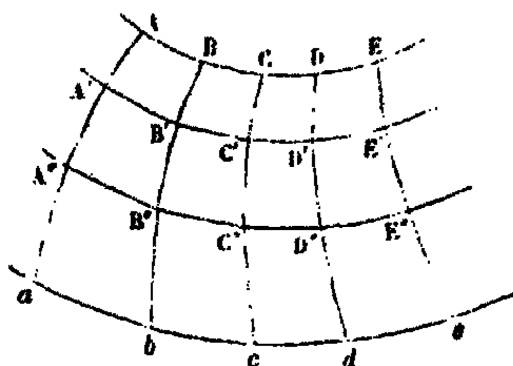
La distance minimum, sur une surface, d'un point de cette surface à une courbe qui s'y trouve tracée, est représentée par une ligne géodésique menée du point à la courbe en question et aboutissant à angle droit sur celle-ci. En effet, si elle ne lui était pas normale, il suffirait de diriger autrement son dernier élément oblique, de manière à le rendre perpendiculaire à la courbe donnée, pour diminuer sa longueur sans le faire sortir de la surface, et pour diminuer ainsi la longueur totale du trajet; ce qui est impossible, puisqu'il n'existe, par hypothèse, dans les conditions voulues, aucune ligne plus courte que la proposée.

De même, la distance minimum, sur une surface, entre deux courbes de la surface, est évidemment une ligne géodésique perpendiculaire aux deux courbes.

Imaginons actuellement, avec Gauss, qu'on mène sur une surface, à partir des divers points d'une courbe quelconque ABCD... de cette surface, des lignes géodésiques AA′, BB′, CC′,... s'en détachant toutes à angle droit et d'une même longueur très petite. Il est clair que ces lignes mesureront les distances minima, sur la surface, de leurs extrémités A′, B′, C′,... à la courbe ABCD..., et que, par suite, le lieu A′B′C′D′... de ces extrémités sera une nouvelle courbe, ayant tous ses points à une même distance minima AA′, sur la surface, de ABCD,... Or il résulte de là que nulle autre ligne menée sur la surface, à partir du point A, par exemple, jusqu'à la rencontre

de A'B'C'D'... et reliant, par conséquent, A'B'C'D'... à ABCD... ne peut être plus courte que AA'. Donc cette ligne géodésique AA' tombe perpendiculairement sur A'B'C'D'...; et, comme il en serait

Fig. 38.

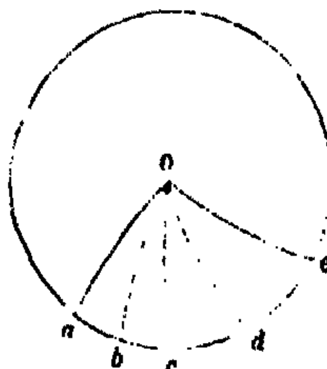


de même de BB', CC', etc., *les deux lignes* AE, A'E' *ont, sur la surface, toutes leurs perpendiculaires géodésiques communes, et de même longueur dans la bande interceptée* AA'E'E.

On voit que ces lignes AE, A'E' sont, sur la surface, les analogues des courbes parallèles sur le plan, et que les géodésiques perpendiculaires AA', BB', ... sont les analogues des normales communes à deux courbes parallèles. En prolongeant toutes ces lignes géodésiques, de manière à leur ajouter de petites longueurs égales quelconques A'A", B'B", C'C",..., on obtiendra une nouvelle parallèle géodésique A"B"C"..., et ainsi de suite, jusqu'à ce que la longueur totale commune des lignes géodésiques issues des points A, B, C,... atteigne telle valeur qu'on voudra $Aa = Bb = \ldots$, si les dimensions de la surface le permettent.

Dans le cas particulier où la courbe de départ AE se réduit à une ligne fermée infiniment petite, c'est-à-dire à un point O, les courbes Aa, Bb, Cc,... deviennent les différentes lignes géodésiques Oa, Ob, Oc,... qui émanent de ce point, et la parallèle obtenue *abcde*... est l'analogue d'un cercle, non seulement en ce qu'elle se trouve partout à la même distance, sur la surface, du *centre géodésique* O, mais encore parce que tous les *rayons géodésiques* Oa, Ob, Oc,... la coupent normalement.

Fig. 39.



On voit que la propriété dont jouit tout cercle de la sphère, d'avoir ses divers points à une même distance, sur la surface, de chacun de ses pôles, et d'être perpendiculaire aux

arcs de grand cercle, lignes géodésiques de la sphère, qui mesurent cette distance, s'étend à une surface quelconque, pourvu qu'on remplace les cercles par des courbes comme *abcd*... et les pôles par des points d'où émanent des rayons géodésiques égaux. Aussi a-t-on appelé ces courbes des *cercles géodésiques*.

FIN DE LA PARTIE COMPLÉMENTAIRE DU TOME I.

11672 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.